ACİL MATEMATİK
AYT

BÖLÜM - 11

Türev

- Türevin Limit Tanımı
- Türev Alma Kuralları
- Bileşke Fonksiyonun Türevi
- Türev - Süreklilik İlişkisi
- Türevin Fiziksel Anlamı
- Türev Karma
- Türevin Geometrik Yorumu
- Artanlık-Azalanlık-Ekstremum Noktalar
- Minimum-Maksimum Problemleri
- Polinom Fonksiyonların Grafikleri
- Türev

Yazarın Notları

Sevgili Öğrencimiz,

Şimdi sıra geldi yılın en kapsamlı konularından biri olan türeve. Öğrenciler arasında en çok dedikodusu yapılan konulardandır. Duyduklarını bir kenara bırakarak tüm benliğinle odaklanman gereken bir konudur. Türevde yaşayacağın sıkıntılar, fonksiyon, parabol, denklem, polinom veya analitik geometri ile alakalı sıkıntılar olabilir. Bu durumun farkına varamazsan sen de bir çok öğrenci gibi türev konusunu günah keçisi ilan edebilirsin. Türevde farkında olmadan soru tipi ezberleyen, sadece tanıdığı soru kalıplarında iştahlı olan bir öğrenci profili vardır. Bu profilden, bol bol yorum yaparak, zaman zaman bir soruya çok daha fazla zaman harcayarak, çözemediğin soruları gerekirse çalıştığın yerde görünen bir yere yapıştırıp ara ara bakarak kurtulmalısın. Daha önce hiç karşılaşmadığın bir soru tipi karşısındaki yorum gücün senin en önemli özelliğin olacaktır. Uzun bir yolun bu ilk adımında sana, minimum stres ve maksimum başarı diliyoruz.

1. $f(x) = x^2$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$f(x) = x^2$, $f(2) = 4$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}} = 4$$

2. $f(x) = 3x - 1$ olmak üzere,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f(x) = 3x - 1$

$f(x+h) = 3(x+h) - 1 = 3x + 3h - 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{3x+3h-1-(3x-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3x}+3h\cancel{-1}\cancel{-3x}\cancel{+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$$

3. f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4}$$

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)(x+2)} = \underbrace{\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}}_{f'(2)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2}}_{\frac{1}{4}}$$

$$= f'(2) \cdot 1/4$$

$$= \frac{f'(2)}{4}$$

4. f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{h}$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)}$$

h 0'a yaklaşırken 3h da 0'a yaklaşır.

Dolayısıyla

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{3h} = f'(x)$$ yazılabilir.

$$3 \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+3h) - f(x)}{3h}}_{f'(x)} = 3 \cdot f'(x)$$

5. f fonksiyonu a noktasında türevli olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} \frac{f^2(x) - f^2(a)}{x - a}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a)) \cdot (f(x) + f(a))}{x - a}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} (f(x) + f(a))}_{2f(a)}$$

$$\Rightarrow 2f(a) \cdot f'(a)$$

$$\Rightarrow \frac{2f(a) \cdot f'(a)}{f'(a)} = 2f(a)$$

6. $f(x) = x^2 + x + 1$

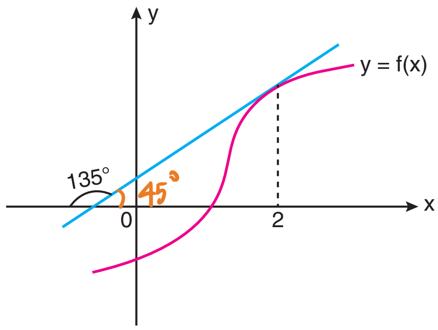
fonksiyonu veriliyor.

$f(1) = 3$ $\quad f(1+h) = (1+h)^2 + (1+h) + 1$

$f(1+h) = h^2 + 3h + 3$

$$\lim_{h \to 0} \frac{h^2+3h+3-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+3)}{\cancel{h}} = 3$$

7. Aşağıda f(x) fonksiyonuna x = 2 apsisli noktasından teğet çizilmiştir.

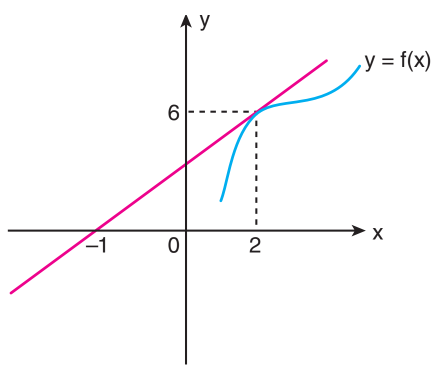


$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

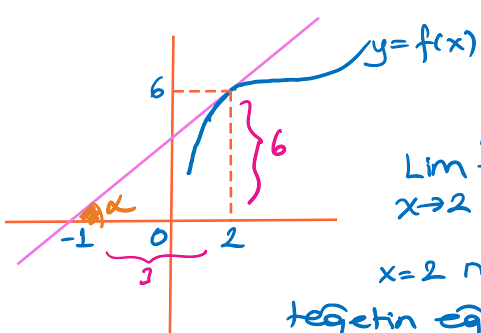
f(x) fonksiyonuna x=2 noktasında çizilen teğetin eğimi (Teğetin x eksenini ile pozitif yönlü yaptığı açının tanjant değeri)

$f'(2)=\tan 45=1$

8.



y = f(x) fonksiyonuna apsisi 2 olan noktasından çizilen teğet doğrusu yukarıda verilmiştir.



$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

x=2 noktasında çizilen teğetin eğimi isteniyor.

$\tan\alpha=\frac{6}{3}=2$

9. y = f(x) fonksiyonuna apsisi 3 olan noktasından çizilen teğet doğrusunun denklemi x = 6y + 5 tir.

$x=6y+5 \rightarrow y=\frac{1}{6}x-\frac{5}{6}$

x= 3 noktasında çizilen teğetin eğimi $f'(3)=1/6$ dır.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{\frac{x}{3}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{\frac{x-3}{3}}=3.\underbrace{\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}}_{f'(3)}$$

$$=3.f'(3)$$

$$=3.\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

10. f türevlenebilir bir fonksiyondur.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{3h}=5$$

eşitliği veriliyor.

I. f fonksiyonuna x = 2 apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi 5 tir.

II. $f'(2) = 15$

III. $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{2x^2-3x-2}=3$ tür.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{3h}=5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}.\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}}_{f'(2)}=5 \Rightarrow f'(2)=15$$

x=2 noktasında çizilen teğetin eğimi 15 tir.

Dolayısıyla I. öncül yanlış, II. öncül doğru

$$\text{III. }\lim_{x\to 2}\underbrace{\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)}_{f'(2)}.\underbrace{\left(\frac{1}{2x+1}\right)}_{\frac{1}{5}}$$

$$f'(2).\frac{1}{5}=15.\frac{1}{5}=3$$

CEVAP II ve III olur.

1.

$$\boxed{f(x) = a.x^n \Rightarrow f'(x) = a.n.x^{n-1}}$$

$$f(x) = 5.3.x^{3-1} = 15x^2$$

$$f'(-1) = 15$$

2. $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{x^{10}}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{10}} \Rightarrow f(x) = x^{-10}$$

$$f'(x) = -10.x^{-10-1} = -10.x^{-11} = -\frac{10}{x^{11}}$$

$$f'(10) = -\frac{10}{10^{11}} = -\frac{1}{10^{10}}$$

3. f ve g tanımlı olduğu aralıkta,

$f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g(x) = x^{-1}$$

$$g'(x) = -1.x^{-2}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$g'(1) = -1$$

$$f'(1) + g'(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

4. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = \cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

5. $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f(x) = \frac{x^2.x^{1/2}}{x^{2/3}} = x^{2+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = x^{11/6}$$

$$f'(x) = \frac{11}{6}.x^{\frac{5}{6}} \Rightarrow f'(1) = \frac{11}{6}$$

6. $f(x) = ax^3 + x^2 - x + a + 1$

fonksiyonu veriliyor.

$f'(-1) = 6$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2x - 1$$

$$f'(-1) = 3a - 2 - 1 = 6$$

$$3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

7. $f(x) = (x^3 + 1) \cdot (\sqrt{x} + 2)$

Çarpımın türevi

$$\boxed{(m(x).n(x))' = m'(x).n(x) + m(x).n'(x)}$$

$$f'(x) = 3x^2.(\sqrt{x}+2) + (x^3+1).\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(1) = 3.3 + 2.\frac{1}{2} = 10$$

ACİL MATEMATİK

8. Tanımlı olduğu aralıkta,

$f(x) = (x-1)(\sqrt{x}+1)$

Çarpımın türevi

$(m(x).n(x))' = m'(x).n(x) + m(x).n'(x)$

$f'(x) = 1.(\sqrt{x}+1) + (x-1).\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(1) = 2 + 0.\frac{1}{2} = 2$

9. $f: \mathbb{R}-\{3\} \to \mathbb{R}-\{2\}$ olmak üzere,

$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

Bölümün Türevi

$\left(\frac{m(x)}{n(x)}\right)' = \frac{m'(x).n(x) - m(x).n'(x)}{n^2(x)}$

$f'(x) = \frac{2.(x-3) - (2x+1).1}{(x-3)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-2-5}{1} = -7$

II. yol $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}$ $\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)' = \frac{-7}{(x-3)^2}$

$f'(1) = -7$

10. Tanımlı olduğu aralıkta,

$f(x) = \frac{2x-1}{3x+1}$

Bölümün Türevi

$\left(\frac{m(x)}{n(x)}\right)' = \frac{m'(x).n(x) - m(x).n'(x)}{n^2(x)}$

$f'(x) = \frac{2(3x+1) - (2x-1).3}{(3x+1)^2} \Rightarrow f'(0) = 5$

II. yol $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}$ $\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)' = \frac{5}{(3x+1)^2}$ $f'(0) = 5$

11. Tanımlı olduğu aralıkta,

$f(x) = \frac{3x-1}{2x-4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x-1}{2x-3}$

Bölümün Türevi

$\left(\frac{m(x)}{n(x)}\right)' = \frac{m'(x).n(x) - m(x).n'(x)}{n^2(x)}$

$(f^{-1})'(x) = \frac{4(2x-3) - (4x-1).2}{(2x-3)^2} \Rightarrow (f^{-1})'(1) = -10$

II. yol $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a.d-b.c}{(cx+d)^2}$ $\left(\frac{4x-1}{2x-3}\right)' = \frac{-12+2}{(2x-3)^2}$

$(f^{-1})'(1) = -10$

12. $f(x) = ax^3 + x^2 - 2x + 1$

fonksiyonu veriliyor.

$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = f''(x)$ $f''(1) = 14$

$f'(x) = 3ax^2 + 2x - 2$

$f''(x) = 6ax + 2 \Rightarrow f''(1) = 6a + 2 = 14$

$a = 2$

13. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)^3$

fonksiyonu veriliyor.

1. yol: Çarpımın türevinden

$f'(x) = \underbrace{(x-2)(x-3)^3}_{0} + (x-1).(x-3)^3 + \underbrace{(x-1)(x-2).3(x-3)^2}_{0}$

$f'(2) = -1$

2. yol:

$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\cancel{(x-2)}(x-3)^3 - 0}{\cancel{(x-2)}}$

$= -1$

14. $f(x) = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$f(x) = \underbrace{(x-1).(x^2+x+1)}_{x^3-1}.\underbrace{(x+1).(x^2-x+1)}_{x^3+1}$

$f(x) = (x^3-1).(x^3+1)$

$f(x) = x^6 - 1 \Rightarrow f'(x) = 6.x^5$

$f'(6) = 6.6^5 = 6^6$

1. $f(x) = 2x^3 - x^2 + x + 1$

fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

$$f'(x) = 6x^2 - 2x + 1$$

$$f'(-1) = 6 + 2 + 1 = 9$$

2. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$

$$f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x^3}} = \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{6}$$

3. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 10$

fonksiyonu veriliyor.

$f'(x) = 12$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 12$$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-9}{3} = -3$$

4. $f(x) = x^2 - x + 1$

$g(x) = x^3 + x$

fonksiyonları veriliyor.

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$g'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

$$(f \cdot g)'(1) = f'(1) \cdot g(1) + f(1) \cdot g'(1)$$

$$(f \cdot g)'(1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 6$$

5. Tanımlı olduğu aralıkta,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 + 1}$$

fonksiyonu veriliyor.

Bölümün türevi

$$\left(\frac{m(x)}{n(x)}\right)' = \frac{m'(x) \cdot n(x) - m(x) \cdot n'(x)}{n^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2 + 1) - (\sqrt{x} - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 - 0}{4} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{4}$$

6. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = (a^2 + a)x + 2$

fonksiyonu veriliyor.

$$f(x) = (a^2 + a) \cdot x + 2 \Rightarrow f'(x) = a^2 + a$$

$$a^2 + a = 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a + 3)(a - 2) = 0$$

$$\cancel{a = -3} \quad \checkmark \; a = 2$$

a nın pozitif değeri istenmişti.

ACİL MATEMATİK

7. P(x) bir polinom olmak üzere,

$P(x) + P'(x) + P''(x) = x^2 + x + 1$

Türevi alınan polinomun derecesi 1 azalır.
dolayısıyla P(x) polinomunun derecesi 2 olmalı.

$P(x) = ax^2 + bx + c$
$P'(x) = 2ax + b$
$+\ P''(x) = 2a$

$ax^2 + bx + c + 2ax + b + 2a = x^2 + x + 1$

$\underbrace{a}_{1}x^2 + \underbrace{(b+2a)}_{1}.x + \underbrace{2a+b+c}_{1} = x^2 + x + 1$ Polinom eşitliği

$a = 1$
$b + 2a = 1 \Rightarrow b = -1$
$2a + b + c = 1 \Rightarrow c = 0$

$P(x) = x^2 - x = x(x-1)$

$\lim_{x \to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 1$

8. $f(x) = x^2 + 1$

fonksiyonu veriliyor.

$$\left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)^2 = 18 \cdot \frac{d^2(f(x))}{dx^2}$$

$\frac{d f(x)}{dx} = f'(x) = 2x$ $\quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x) = 2$

$(2x)^2 = 18.2 \Rightarrow 4x^2 = 36$

$x_1 = 3,\ x_2 = -3$

$x_1 . x_2 = -9$

9. P(x), ikinci dereceden başkatsayısı 1 olan bir polinomdur.

$P(1) = P(2)$

$P(x) = 1.(x-1).(x-2) + k$

$P(x) = x^2 - 3x + 2 + k$

$P'(x) = 2x - 3$

$P'(4) = 5$

10. $f(x) = ax^2 - x^2 + (b + 1)x - 2x + 3$

fonksiyonu veriliyor.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) = 0$

$f'(x) = 2ax - 2x + (b+1) - 2$

$f'(x) = (2a-2)x + b - 1$

Her $x \in \mathbb{R}$ için $\underbrace{(2a-2)}_{0}.x + \underbrace{b-1}_{0} = 0$

Tüm x ler için sağlanması için

$2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$
$b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$

$a + b = 2$

11. f(x) bir polinom fonksiyondur.

$f(x) \neq 0$ olmak üzere,

$f(x) = f'(x) \cdot f''(x)$

f(x) in en yüksek dereceli terimi ax^n olsun.

$f(x) = ax^n$
$f'(x) = a.n.x^{n-1}$
$f''(x) = a.n.(n-1).x^{n-2}$

$\cancel{a}x^n = \cancel{a}.n.x^{n-1} . a.n(n-1).x^{n-2}$

$x^n = a.n^2(n-1).x^{2n-3}$

$n = 2n - 3 \Rightarrow n = 3$

$1 = a.n^2(n-1)$

$1 = a.9.2 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$

ACİL MATEMATİK

1. $f(x) = (3x^2 - 1)^5$

$$\boxed{f(x) = g^n(x) \Rightarrow f'(x) = n.g^{n-1}(x).g'(x)}$$

$f(x) = (3x^2-1)^5 \Rightarrow f'(x) = 5.(3x^2-1)^4.6x$

$f'(1) = 5.2^4.6 = 30.16 = 480$

2. $f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{(2x-1)^5}$$

fonksiyonu veriliyor.

$$\boxed{f(x) = g^n(x) \Rightarrow f'(x) = n.g^{n-1}(x).g'(x)}$$

$f(x) = (2x-1)^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5.(2x-1)^{-6}.2$

$\Rightarrow f'(0) = -5.1.2 = -10$

3. Tanımlı olduğu aralıkta,

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x + 1}$$

fonksiyonu veriliyor.

$$\boxed{f(x) = \sqrt{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

$f'(x) = \dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x+1}} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{2}{2\sqrt{1}} = 1$

4. $f(5x - 1) = -x^2 + 14x + 3$

$$\boxed{(f\circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)}$$

$f(5x-1) = -x^2+14x+3$

$f'(\underbrace{5x-1}_{9}).5 = -2x+14$

$x = 2$ için

$f'(9).5 = 10 \Rightarrow f'(9) = 2$

5. $f(x) = 2x + 1$

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{3}$$

$$\boxed{(g\circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)}$$

$f'(x) = 2$

$g'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$

$(g\circ f)'(2) = g'(\underbrace{f(2)}_{5}).f'(2)$

$= 25.2 = 50$

6. $x > 0$ olmak üzere,

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 4}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x}+4}} \Rightarrow f'(4) = \dfrac{\frac{1}{4}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{48}$

7. Tanımlı olduğu aralıkta,

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{u(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

$f'(x) = \dfrac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \Rightarrow f'(1) = \dfrac{\frac{3}{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$

8. $f(x)=\sqrt[3]{x^3+x+6}$

fonksiyonu veriliyor.

$f(x)=\sqrt[3]{u(x)} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'(x)}{3\sqrt[3]{u^2(x)}}$

$f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{3\sqrt[3]{(x^3+x+6)^2}} \Rightarrow f'(1)=\dfrac{\cancel{4}}{3.\cancel{4}}$

$=\dfrac{1}{3}$

9. $f(x)=\sqrt{x+3} \rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

$g(x)=x^3-x+1 \rightarrow g'(x)=3x^2-1$

$h(x)=4x^2+2 \rightarrow h'(x)=8x$

$(g\circ f\circ h)'(x)=g'(f(h(x))).f'(h(x)).h'(x)$

$x=1$ için $g'(f(\underbrace{h(1)}_{6})).f'(\underbrace{h(1)}_{6}).\underbrace{h'(1)}_{8}$

$\Rightarrow g'(\underbrace{f(6)}_{3}).\underbrace{f'(6)}_{\frac{1}{6}}.\ 8=26.\frac{1}{6}.8=\dfrac{104}{3}$

10. Tanımlı olduğu aralıkta,

$f^2(\sqrt{x})=5x^2+1$

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$2f(\sqrt{x}).f'(\sqrt{x}).\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=10x$

$x=4$ için $2f(2).f'(2).\dfrac{1}{4}=40$

$f(2).f'(2)=80$

11. $f^3(3x)=x^2-x+7$

$x=5$ için $f^3(15)=27 \Rightarrow f(15)=3$

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$3f^2(3x).f'(3x).3=2x-1$

$x=5$ için $3\underbrace{f^2(15)}_{9}.f'(15).3=9$

$f'(15)=\dfrac{1}{9}$

12. $x\neq 0$ olmak üzere,

$f(x)=\dfrac{g(x^2)}{x}$

fonksiyonu veriliyor.

$g(1)=0$ ve $g'(1)=3$

Bölümün türev alma kuralını uygulayalım.

$f'(x)=\dfrac{g'(x^2).2x.x-g(x^2).1}{x^2}$

$f'(-1)=\dfrac{g'(1).2-g(1)}{1}$

$f'(-1)=6$

13. f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.

x	f(x)	g(x)	f'(x)	g'(x)
0	2	1	1	2
1	0	0	1	1
2	1	1	1	0

$f'(\underbrace{g(0)}_{1}).\underbrace{g'(0)}_{2}+f'(\underbrace{f(2)}_{1}).\underbrace{f'(2)}_{1}$

$\underbrace{f'(1)}_{1}.2+\underbrace{f'(1)}_{1}.=3$

14. $g(2x+1)=\dfrac{f(x)}{x}$

fonksiyonu veriliyor.

$f'(2)=g'(5)=3$

$x=2$ için $g(5)=\dfrac{f(2)}{2} \Rightarrow f(2)=2g(5)$

Bölümün türev alma kuralını uygulayalım.

$g'(2x+1).2=\dfrac{f'(x).x-f(x).1}{x^2}$

$x=2$ için $g'(5).2=\dfrac{f'(2).2-f(2)}{4}$

$6=\dfrac{6-f(2)}{4} \Rightarrow f(2)=-18$

1. $f(2x + 1) = x^3 - 3x + 4$

eşitliği veriliyor.

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$2 \cdot f'(2x+1) = 3x^2 - 3$

x=2 için

$2f'(5) = 9 \Rightarrow f'(5) = \frac{9}{2}$

2. $f(x) + f(3x - 4) = x^2 - 3x + 1$

eşitliği veirliyor.

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$f'(x) + 3 \cdot f'(3x-4) = 2x - 3$

x=2 için

$f'(2) + 3 \cdot f'(2) = 1$

$4f'(2) = 1 \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{4}$

3. $f(3x) = (x - 2) \cdot g(x)$

eşitliği veriliyor.

$g(2) = 12$

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$3 \cdot f'(3x) = 1 \cdot g(x) + (x-2) \cdot g'(x)$

$3f'(6) = \underbrace{g(2)}_{12} + 0 \Rightarrow 3f'(6) = 12$

$f'(6) = 4$

4. $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyondur.

$f(2) = -2$ ve $f'(2) = 2$

$g(x) = f\left(\frac{f^2(x)}{x}\right)$

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$g'(x) = f'\left(\frac{f^2(x)}{x}\right) \cdot \left(\frac{2f(x) \cdot f'(x) \cdot x - f^2(x)}{x^2}\right)$

x=2 için

$g'(2) = f'\left(\frac{f^2(2)}{2}\right) \cdot \left(\frac{2f(2) \cdot f'(2) \cdot 2 - f^2(2)}{4}\right)$

$g'(2) = f'(2) \cdot \left(\frac{-16-4}{4}\right) = -10 \quad g'(2) = -10$

5. $y = x^2$

$x = 2t^2$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = ?$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \left. 2x \cdot 4t \right|_{\substack{t=1 \\ x=2}} \quad \left(\begin{matrix} x=2t^2 \\ t=1 \text{ için } x=2 \end{matrix}\right)$

$= 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 16$

6. $m = x^2 - 1$

$n = m^2 - m + 1$

$f(n) = (n + 1)^2 - 3$

$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} = ?$

$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dn} \cdot \frac{dn}{dm} \cdot \frac{dm}{dx}$

$= 2(n+1) \cdot (2m-1) \cdot 2x \quad \left(\begin{matrix} x=1 \text{ için} \\ m=0,\ n=1 \text{ olur} \end{matrix}\right)$

$= 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -8$

7. f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$f(-x) = -f(x)$ eşitliği verilsin.

Eşitliğin iki tarafının türevi alınırsa;

$f'(-x) \cdot (-1) = -f'(x)$

$f'(-x) = f'(x)$

eşitliği bulunur.

I. Negatif değerli fonksiyonların türevi pozitif değerli bir fonksiyon olur.

II. Tek fonksiyonların türevi bir çift fonksiyon olur.

III. Azalan fonksiyonların türevi artan fonksiyon olur.

$f(-x) = -f(x)$ ise f tek fonksiyondur.

$f(-x) = f(x)$ ise f çift fonksiyondur.

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ Tek fonksiyon

$f'(x).(-1) = -f'(x) \rightarrow$ Türevi alındı.

$f'(x) = f'(-x) \rightarrow$ Çift fonksiyon oldu.

Dolayısıyla Yalnız II doğrudur.

8. Uygun koşullarda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonu için,

$f'(0) = 3$ ve $f(0) = 0$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}\left(f^2(x)\right)\right|_{x=0} = ?$$

$f^2(x)$ fonksiyonun II. mertebeden türevi

$2f(x).f'(x)$ 1. türev

$2\left(f'(x).f'(x) + f(x).f''(x)\right)$ 2. türev

$x=0$ için

$2\left(f'(0).f'(0) + f(0).f''(0)\right) = 2\left(3.3 + 0.f''(0)\right)$

$= 18$

9. Tanımlı olduğu aralıkta,

$$f(x) = \sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}}$$

ÖZEL KÖK

$\sqrt{a+b+2\sqrt{a.b}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$f(x) = \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}$

$(x+1)+1$ $\quad (x+1) \cdot 1$

$f(x) = \sqrt{x+1} + 1$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$\Rightarrow f'(3) = \dfrac{1}{4}$

10. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve türevli f fonksiyonu için,

- $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$
- $f'(0) = 3$ $\quad f'(1) = ?$

x ve y lerin yeri değiştiğinde $f(y+x) = f(y) + f(x) + yx$ Yani fonksiyon değişmiyor. hangi değişkene göre türev alınacağının önemi yok.

x değişkenine göre türev alalım.

$f'(x+y) = f'(x) + y$

$x=0, y=1$ alınırsa

$f'(1) = \underbrace{f'(0)}_{3} + 1 = 4$ //

11. Gerçel sayılar kümesi üzerinde türevlenebilir bir f tek fonksiyonu için,

$f(1) = 4$

$f'(1) = -6$

eşitlikleri veriliyor.

$f(x)$ tek fonksiyon ise türevi $f'(x)$ çift fonksiyon.

$f(1) = 4$ f tek fonksiyon olduğundan $f(-1) = -4$

$f'(1) = -6$ f' çift fonksiyon olduğundan $f'(-1) = -6$

$g(x) = x.f(x)$

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

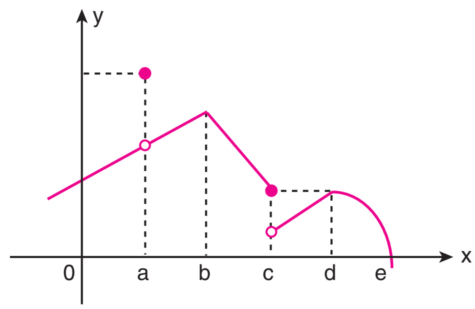
$g'(x) = 1.f(x) + x.f'(x)$

$x = -1$ için

$g'(-1) = \underbrace{f(-1)}_{-4} - \underbrace{f'(-1)}_{-6} \Rightarrow g'(-1) = -4+6$

$\Rightarrow g'(-1) = 2$

1.



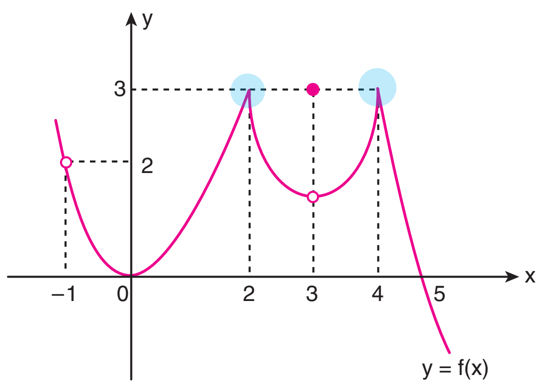
Şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

a , c , $\underbrace{b \;,\; d}$

süreksiz olduğundan — limitsiz olduğundan — sürekli ama sivri nokta olduğundan.

a, b, c, d noktalarında türevsizdir.

2.



Şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Sürekli olmasına rağmen türevsiz noktalar sivri noktalardır.

x=2 ve x=4 noktalarıdır.

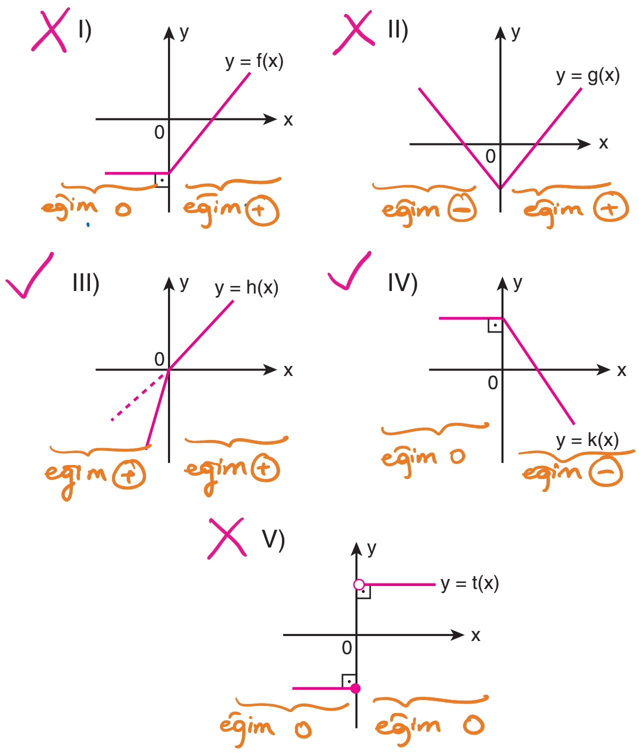
3. $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-6x+m}$

Tanımsız olmaması için kök olmaması gerekir. Δ<0 olmalı

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

$36 - 4.m < 0 \Rightarrow 36 < 4m \Rightarrow m > 9$

4. Aşağıda beş farklı fonksiyonun grafiği gösterilmiştir.



III. öncülde iki tarafta da eğim pozitif ama negatif apsislerde fonksiyon daha hızlı artıyor.
dolayısıyla cevap III ve IV tür.
h(x) ve k(x) fonksiyonları

5. ✓ I. f(x) ve g(x) fonksiyonları herhangi bir a reel sayısı için türevlenebilir ise

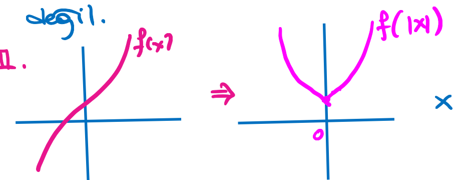
$\left.\begin{array}{l} f'(a^+) = f'(a^-) \\ g'(a^+) = g'(a^-) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(a^+) + g'(a^+) = f'(a^-) + g'(a^-)$ olduğundan $(f+g)(x)$ TÜREVLİDİR

✗ II. $(f-g)(x)$ fonksiyonu a reel sayısı için türevlenebilir ise

$f'(a^+) - g'(a^+) = f'(a^-) - g'(a^-)$ sağlanır ama

$f'(a^+) = f'(a^-)$ ve $g'(a^+) = g'(a^-)$ olmak zorunda değil.

✗ III.



x=0 da sivri nokta oluşur
x=0 da türev yok.

✗ IV. $f(x) \geq 0 \rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \rightarrow f(x)=0$ için tanımsız.

Türevli olmak zorunda değil.

1. $f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & , \ x > 1 \\ x^2 + x & , \ x \le 1 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

Önce Süreklilik testi yapalım.

$\underbrace{\lim_{x \to 1^+} f(x)}_{2} = \underbrace{\lim_{x \to 1^-} f(x)}_{2} = \underbrace{f(1)}_{2}$ (süreklilik koşulu sağlanıyor.)

Sağ ve sol türevine bakalım.

$f'(1^+) = f'(1^-)$

$(4x-2)'\big|_{x=1} \overset{?}{=} (x^2+x)'\big|_{x=1}$

$4 \overset{?}{=} (2x+1)\big|_{x=1}$

$4 \overset{?}{=} 3$ eşitlik sağlanmıyor.

x=1 noktasında türev yoktur.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx + 2 & , \ x \ge 2 \\ mx + n & , \ x < 2 \end{cases}$

Tüm gerçek sayılarda türevli olduğundan x=2 noktasında da türevlidir.

Önce Süreklilik koşulunu sağlatalım.

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$

$4 + 2n + 2 = 2m + n \Rightarrow 2m - n = 6$

Türev Koşulunu sağlatalım.

$f'(2^+) = f'(2^-)$

$(2x+n)\big|_{x=2} = m \big|_{x=2} \Rightarrow 4 + n = m$

$n = -2$

$m = 2$

$\boxed{m \cdot n = -4}$

3. $f(x) = \begin{cases} 2x + a, & x \le -1 \\ bx^2 + 3, & x > -1 \end{cases}$

fonksiyonu x = –1 noktasında süreklidir.

Süreklilik sağlanacak

* $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim_{x \to (-1)^-} f(x) = f(-1)$

$\underbrace{b+3 = -2+a}_{a-b=5}$

Türev Sağlanmayacak

* $f'((-1)^+) \ne f'((-1)^-)$

$2bx \qquad 2$

x=−1 için

$-2b \ne 2$

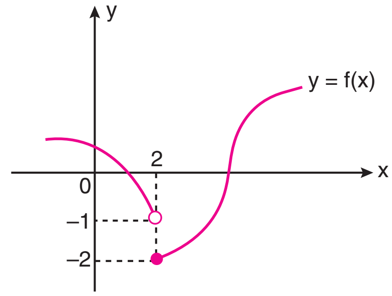
$b \ne -1$

$b \ne -1$ ise $a-(-1) \ne 5$ $\quad a+1 \ne 5$

$a \ne 4$

a, 4 olamaz.

4.



Yukarıda, f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$g(x) = \begin{cases} ax + 2, & x < 2 \\ ax^2 + x + a, & x \ge 2 \end{cases}$

fonksiyonu tanımlanıyor.

f+g fonksiyonu x=2 noktasında sürekli ise

$\underbrace{\lim_{x \to 2^+} f(x)}_{-2} + \underbrace{\lim_{x \to 2^+} g(x)}_{(4a+2+a)} = \underbrace{\lim_{x \to 2^-} f(x)}_{-1} + \underbrace{\lim_{x \to 2^-} g(x)}_{(2a+2)} = f(2) + g(2)$

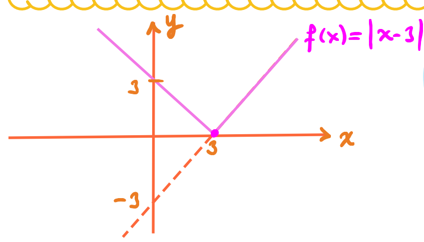
$5a = 2a + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} + 2, & x < 2 \\ \frac{x^2}{3} + x + \frac{1}{3}, & x \ge 2 \end{cases}$

x=3 için türev $g'(x) = \frac{2x}{3} + 1$, $g'(3) = 3$

5. f(x) = |x – 3|

$f(x) = |(x-a)^n|$ $\quad$ n=1 ise $f'(a)$ yoktur. $\quad$ n>1 ise $f'(a) = 0$



x=3 noktası kırılma noktası dolayısıyla türev yok.

6. f(x) = |x² – 4|

fonksiyonu veriliyor.

x=3 için $x^2 - 4 > 0$ $\quad f(x) = x^2 - 4$

$f'(x) = 2x \quad f'(3) = 6$

x=1 için $x^2 - 4 < 0$ $\quad f(x) = -x^2 + 4$

$f'(x) = -2x$

$f'(1) = -2$

$f'(3) - f'(1) = 6 - (-2) = 8$

ACİL MATEMATİK

7. ✗ $f(x) = |x - 1|$

✓ $g(x) = |(x - 1)^2|$

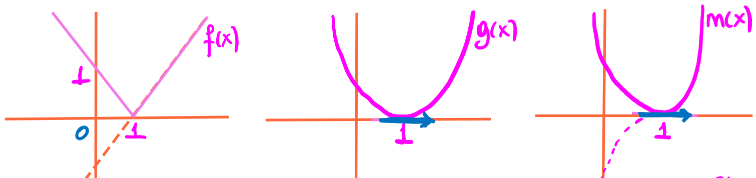
✗ $h(x) = \sqrt{x - 1}$ → $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$

$x=1$ noktasında tanımsız.

$h'(1)$ yoktur.

✓ $m(x) = |(x - 1)^3|$

$f(x) = |(x-a)^n|$ $n=1$ ise $f'(a)$ yok; $n>1$ ise $f'(a) = 0$



$f(x) = |x-1|$ sivri nokta

$f'(1)$ yok

$\underbrace{g(x) = |(x-1)^2| \quad m(x) = |(x-1)^3|}$

$x=1$ noktasındaki teğetinin eğimi 0 dır.

$g'(1) = 0$ $m'(1) = 0$

8. $f(x) = |x^2 - kx - 6|$

fonksiyonu veriliyor.

$x=1$ noktası kritik nokta olmalı

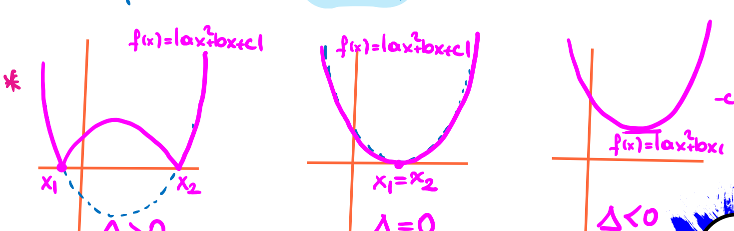
$f(1) = 0$ $1 - k - 6 = 0$ $k = -5$

9. $f(x) = x^2 - 4x + m$

fonksiyonu veriliyor.

$|f(x)| = |x^2 - 4x + m|$ fonksiyonunun tüm gerçek sayılarda türevli olması için $x^2 - 4x + m$ ifadesi için $\Delta \le 0$ koşulu sağlanmalı. $(\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c)$

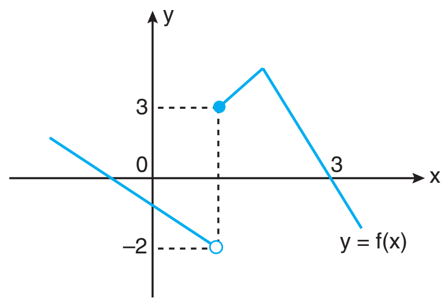
$16 - 4 \cdot m \le 0 \Rightarrow m \ge 4$ olmalı.

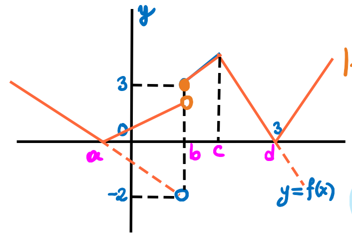


x_1 ve x_2 de türevsiz.

$\underbrace{\Delta = 0 \quad \Delta < 0}$ Tüm gerçek sayılarda TÜREVLİ

10. Aşağıda, f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

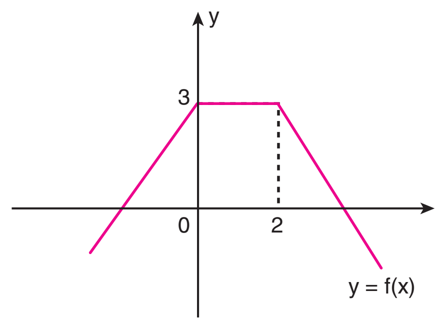




grafiğin x ekseninin altında kalan kısımlar x eksenine göre simetri alındı.

a, b, c, d noktalarında türev yoktur.

11.

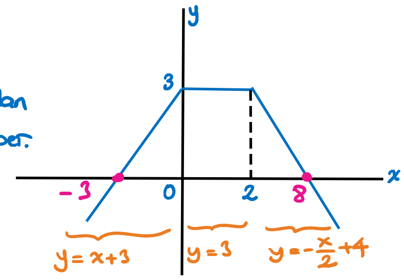


Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & 0 < x < 2 \\ \dfrac{-1}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

$x<0$ için eğim 1 olduğundan negatif kısımda $x=-3$ te keser.

$x>2$ için eğim $-\frac{1}{2}$ olduğundan pozitif kısımda $x=8$ te keser.



$f(f(-\frac{1}{2})) = f(\frac{5}{2}) = \frac{11}{4}$

12. $$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4|, & x < 1 \\ \dfrac{3}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$$

Önce $x=1$ (Kritik Nokta) için inceleyelim.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{3}{x}\right) = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} |x^2 - 4| = 3$

$f(1) = 3$

$x=1$ de sürekli

$f'(1^-) = -2$

$f'(1^+) = -3$

$x=1$ de türev yok.

Ayrıca $x<1$ için $|x^2-4| = |(x-2)(x+2)|$ fonksiyonu $x=-2$ de sürekli ama türevsizdir.

$f(x)$ fonksiyonu $x=-2$ ve $x=1$ noktalarında sürekli ama türevsizdir. $-2+1=-1$ dir.

1. x ekseni üzerinde pozitif yönde hareket eden bir parçacığın t anındaki konumu,

$x(t) = t^3 - 4t + 2$

ile gösterilmektedir.

V(t) fonksiyonu hızın zamanı bağlı denklemi olmak üzere;

$x'(t) = V(t) = 3t^2 - 4$

t=2 için $V(2) = 8$

2. x ekseni üzerinde, pozitif yönde hareket eden bir parçacığın t anındaki konumu,

$x(t) = t^3 + 3t^2 + 2t - 5$

ile gösterilmektedir.

V(t) hızın zamana bağlı ve a(t) ivmenin zamana bağlı fonksiyonu olmak üzere

$x'(t) = V(t) = 3t^2 + 6t + 2$

$V'(t) = a(t) = 6t + 6$

t=1 için $a(1) = 12$

3. Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin zamana (saniye) bağlı konumu (metre),

$x(t) = t^2 + t + 3$

fonksiyonu ile verilmektedir.

ilk 4 saniyedeki ortalama hız.
([0,4] aralığındaki aralığındaki ortalama hız)

$\dfrac{x(4) - x(0)}{4 - 0} = \dfrac{23 - 3}{4} = 5$

4. Bir hareketlinin t saatte aldığı yol $S(t) = t^2$ (km) fonksiyonu veriliyor.

Hareketlinin [4, 5] zaman aralığındaki ortalama hızı V_{ort} ve hareketlinin 5. saatteki anlık hızı V_a dır.

[4,5] zaman aralığında ortalama hız

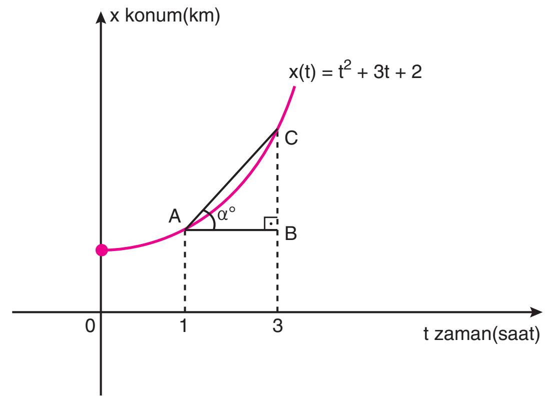
$V_{ort} = \dfrac{S(5) - S(4)}{5 - 4} = \dfrac{25 - 16}{1} = 9$

Hız denklemi;

$S'(t) = V(t) = 2t$ t=5 için $V(5) = 10$

$V_a - V_{ort} = 10 - 9 = 1$

5. Ela adında bir öğrenci bir hareketlinin zaman-konum grafiğini incelemiş ve aşağıdaki işlemleri yapmıştır.

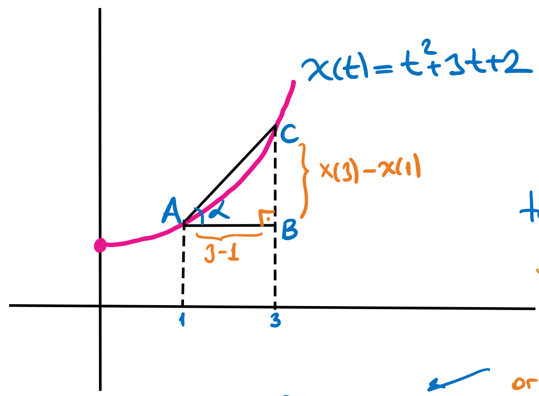


Ela, belirli işlemlerden sonra tanα'nın sonucunu bulmuştur.

✗ I. Hareketlinin 1. ve 3. saatler arasındaki toplam yer değişimini,

✓ II. Hareketlinin 1. ve 3. saatler arasındaki ortalama hızını,

✗ III. Hareketlinin 1. ve 3. saatler arasındaki hız değişimini,



$\tan\alpha = \underbrace{\dfrac{x(3) - x(1)}{3 - 1}}_{\text{[1,3] zaman aralığındaki ortalama hız}}$

Dolayısıyla Yalnız II doğrudur.

6. $f(x) = x^3 - x + 1$

f(x) fonksiyonunun [a,b] aralığında ortalama değişim oranı $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ dır.

$\dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{25 - 1}{2} = 12$

1. $f(x) = 3x^2 + 4$

fonksiyonu veriliyor.

$$\lim_{x \to -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = f'(-2)$$

$f(x) = 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 6x$

$x = -2$ için $f'(-2) = -12$

2. $f(x) = x^3 \cdot g(x)$

fonksiyonu veriliyor.

$g(2) = -1$

$g'(2) = 3$

$f(x) = x^3 \cdot g(x)$

Esitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$f'(x) = 3x^2 \cdot g(x) + x^3 \cdot g'(x)$

$x = 2$ için,

$f'(2) = 12\underbrace{g(2)}_{-1} + 8 \cdot \underbrace{g'(2)}_{3}$

$f'(2) = 12$

3. $g(1) \neq 0$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{g(x)}$$

Esitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot g(x) - (x^2-1) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f'(1) = \frac{2g(1) - 0}{g^2(1)} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{g(1)}$$

4. f ve g türevlenebilen iki fonksiyondur.

$f(x) + g(x) = (x^3 - 1) \cdot f(x)$

$f(1) = 2$

$f(x) + g(x) = (x^3 - 1) \cdot f(x)$

esitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$f'(x) + g'(x) = 3x^2 \cdot f(x) + (x^3 - 1) \cdot f'(x)$

$x = 1$ için

$f'(1) + g'(1) = 3 \cdot \underbrace{f(1)}_{2} + 0$

$f'(1) + g'(1) = 6$

5. f ve g türevlenebilen iki fonksiyondur.

$f(x) \cdot g(x) = x$

$f'(3) \cdot g(3) = 5$

$f(x) \cdot g(x) = x$

Esitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 1$

$x = 3$ için,

$\underbrace{f'(3) \cdot g(3)}_{5} + f(3) \cdot g'(3) = 1 \Rightarrow f(3) \cdot g'(3) = -4$

6. P(x) polinomunun türevi P'(x) olmak üzere,

$P(x) - P'(x) = 5x + 6$

der[P(x)] > der[P'(x)] olmalı

$P(x) = ax + b$ olsun.

$P'(x) = a$ olur.

$\underbrace{P(x)}_{ax+b} - \underbrace{P'(x)}_{a} = 5x + 6$

$ax + b - a = 5x + 6$

$a = 5$

$b - a = 6 \Rightarrow b = 11$

$P(x) = 5x + 11$

P(x) in sabit terimi $P(0) = 11$

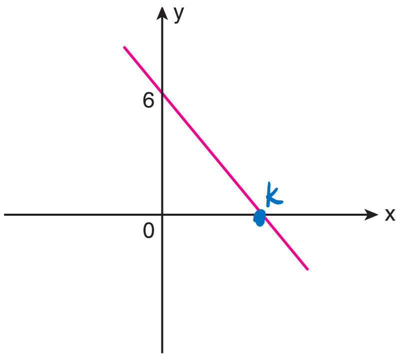
7. $f(x) = 1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots + x^{99}$

$f'(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + 99x^{98}$

$f'(1) = \underbrace{1-2}_{-1}+\underbrace{3-4}_{-1}+\underbrace{\ldots}_{-1} \ldots \underbrace{-98}_{-1} + 99$

$= 49.(-1) + 99 = 50$

8.



Şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f'(2) = \dfrac{-3}{2}$ ⇒ x=2 noktasındaki eğimi ifade eder.

f(x) doğrusal fonksiyon olduğundan her noktasında eğim $-\frac{3}{2}$ dir.

k, doğrunun x eksenini kestiği nokta olsun.

$-\frac{6}{k} = \frac{-3}{2} \Rightarrow k = 4$ tür.

$f(x) = -\frac{3}{2}x + 6$

$f(2) = 3$

9. Tanımlı olduğu aralıkta,

$f(\sqrt[6]{x}) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$

$f(\underbrace{\sqrt[6]{x}}_{t}) = (\underbrace{\sqrt[6]{x}}_{t})^2 - (\underbrace{\sqrt[6]{x}}_{t})^3$

$f(t) = t^2 - t^3 \Rightarrow f'(t) = 2t - 3t^2$

$f'(2) = 4 - 12 = -8$

10. $x > 0$ olmak üzere,

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}.(1+\sqrt{x}) - \sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$

x=4 için,

$f'(4) = \dfrac{\frac{1}{4}.3 - \frac{1}{2}}{9} = \dfrac{\frac{1}{4}}{9} = \dfrac{1}{36}$

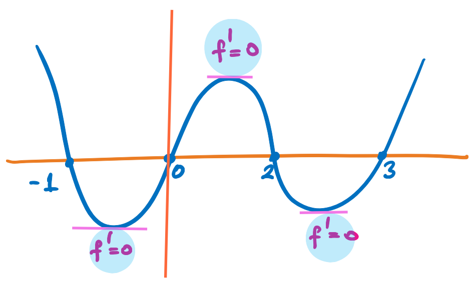
11. $f(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x+1)$

fonksiyonu veriliyor.

$f(x) = x.(x-2)(x-3)(x+1)$

$x=0$, $x=2$, $x=3$, $x=-1$

noktalarında x eksenini keser.



3 farklı noktada eğim 0 olacağından $f'(x)=0$ denkleminin 3 farklı kökü vardır.

12. $f(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{10}$

fonksiyonu veriliyor.

$A = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 9 \cdot 10$

$f(x) = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{10}$

$\Rightarrow f'(x) = 1 + 2.x + 3x^2 + \ldots + 10.x^9$

$\Rightarrow f''(x) = 2.1 + 3.2.x + \ldots + 10.9.x^8$

$\Rightarrow f''(1) = \underbrace{2.1 + 3.2 + 4.3 + \ldots + 10.9}_{A}$

$\Rightarrow A = f''(1)$

ACİL MATEMATİK

13. $x \neq 1$ olmak üzere,

$$(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1) = \frac{g(x)}{x-1}$$

eşitliği veriliyor.

içler-dışlar çarpımından

$g(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)$

$g(x) = (x^2-1)\cdot(x^2+1)\cdot(x^4+1)$

$g(x) = (x^4-1)\cdot(x^4+1)$

$g(x) = x^8-1 \Rightarrow g'(x) = 8\cdot x^7$

$x=2$ için $g'(2) = 8\cdot 2^7 = 2^3\cdot 2^7 = 2^{10} = 4^5$

14. $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2}$

fonksiyonu veriliyor.

$f(x) = (x+2)^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2(x+2)^{-3}$

$(x+2)^{-2} = -2\cdot(x+2)^{-3}$

$1 = -2(x+2)^{-1} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{1}{x+2}$

$\Rightarrow x+2 = -2 \Rightarrow x = -4$

15. $g(x) = x \cdot f(3x-1)$

eşitliği veriliyor.

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$g'(x) = 1\cdot f(3x-1) + x\, f'(3x-1)\cdot 3$

$x=0$ için

$g'(0) = f(-1) + 0$

$g'(0) = f(-1)$

16. $g(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot f(x)$ ve $f(1) = 3$

$$g'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot f(x)}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x-2)\cdot(x-3)\cdot f(x)$$

$$= (-1)(-2)\cdot\underbrace{f(1)}_{3} = 6$$

17. $f(x) = |x+2|$ fonksiyonu için;

✓ I. f fonksiyonu $x = -2$ apsisli noktada sürekli olmasına rağmen türevsizdir.

✓ II. f fonksiyonunun görüntü kümesi $[0, \infty)$ dır.

✗ III. f çift fonksiyondur.

✓ I. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq -2 \\ -x-2, & x < -2 \end{cases}$ $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = \lim_{x\to(-2)^-} f(x) = f(-2)$ olduğundan, f $x=-2$ de sürekli

$\left.\begin{matrix} f'((-2)^+) = 1 \\ f'((-2)^-) = -1 \end{matrix}\right\}$ $x=-2$ de f türevsiz.

✓ II. Tüm x gerçek sayıları için $|x+2| \geq 0$ olduğundan görüntü kümesi $[0,\infty)$ dur.

✗ III $f(x) = |x+2|$, $f(-x) = f(x)$ koşulunu sağlamaz.

18. ✓ I. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki bir noktada türevliyse o noktada süreklidir.

✗ II. $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığındaki bir noktada sürekliyse o noktada türevlidir.

✗ III. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, f(x) türevliyse |f(x)| de türevlidir.

I ve II

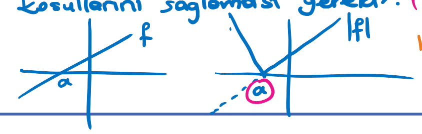
f türevli ise f süreklidir, f sürekli ise f türevli olmak zorunda değildir.

f in $x=a$ da türevli olması için

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$, $f'(a^+) = f'(a^-)$

koşullarını sağlaması gerekir. (I doğru)

III



|f| $x=a$ da türevsiz.

1. B	2. A	3. D	4. A	5. B	6. C
7. E	8. D	9. B	10. D	11. C	12. C
13. B	14. A	15. C	16. C	17. C	18. A

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \le 1 \\ x-1 & , \ x > 1 \end{cases}$

* x=1 noktasında türevi inceleyelim.

$\lim_{x\to 1^+}(x-1) = 0$, $\lim_{x\to 1^-}(x^2) = 1$ } x=1 de limiti değil dolayısıyla bu noktada türev tanımsız.

$$f'(x) = \begin{cases} (x^2)' & , x<1 \\ (x-1)' & , x>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & , x<1 \\ 1 & , x>1 \end{cases}$$

2. Hareket denklemi,

$S(t) = 2t^3 - 4t^2 + 1$

$$S'(t) = V(t) = 6t^2 - 8t$$

$$V'(t) = a(t) = 12t - 8$$

$t=2$ için $V = 8$

$t=2$ için $a = 16$

$$V - a = 8 - 16 = -8$$

3. $g(x) = \sqrt{f(2x)}$

fonksiyonu veriliyor.

$$\boxed{g(x) = \sqrt{u(x)} \Rightarrow g'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}}$$

$$g'(x) = \frac{f'(2x).\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{f(2x)}} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(2x)}{\sqrt{f(2x)}}$$

4. f ve g türevlenebilen fonksiyonları için,

$f(2x+1) = x \cdot g(1-x)$

eşitliği sağlanmaktadır.

$g(0) - g'(0) = 6$

$f(2x+1) = x.g(1-x)$ Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$2.f'(2x+1) = 1.g(1-x) + x.g'(1-x).(-1)$$

x=1 için.

$$2f'(3) = \underbrace{g(0) - g'(0)}_{6}$$

$$2f'(3) = 6 \Rightarrow f'(3) = 3$$

5. $y = f(3x)$

$f'(x) = 5x - 2$ $\Rightarrow f'(3x) = 5.3x - 2 = 15x - 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(3x))}{dx} = 3.\underbrace{f'(3x)}_{15x-2}$$

$$= 3.(15x-2) = 45.x - 6$$

6. $f : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 60 \cdot \sqrt{4 + \sqrt{x}}$

$$f'(x) = 60.\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{4+\sqrt{x}}}$$

$$f'(25) = 60.\frac{\frac{1}{10}}{6} = 1$$

7. f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır.

- $(f \circ g)(x) = x^3$
- $g(1) = 2,\ g'(1) = 1,\ g''(1) = 4$

$(f \circ g)(x) = x^3$

$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3x^2 \Rightarrow x = 1$ için $f'(g(1)) = 3$

$f''(g(x)) \cdot g'(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x) = 6x$

$x = 1$ için

$f''(\underbrace{g(1)}_{2}) \cdot \underbrace{g'(1)}_{1} \cdot \underbrace{g'(1)}_{1} + \underbrace{f'(g(1))}_{3} \cdot \underbrace{g''(1)}_{4} = 6$

$f''(2) + 12 = 6 \Rightarrow f''(2) = -6$

8. Her $x \in \mathbb{R}$ için f(x) türevli, g(x) sürekli bir fonksiyondur. Yiğit adında bir öğrenci,

$$f(x) - f(2) = g(x) \cdot (x^3 - 8)$$

eşitliğini kullanarak f fonksiyonunun x = 2 deki türevini elde etmek istiyor.

İşlem adımları aşağıdaki gibidir.

I. $f(x) - f(2) = g(x) \cdot (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

II. $\dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = g(x) \cdot (x^2 + 2x + 4)$

III. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} (g(x) \cdot (x^2 + 2x + 4))$

IV. $f'(2) = g(2) \cdot (2^2 + 2 \cdot 2 + 4) = 12 \cdot g(2)$

I. adımda küp açılımı yapmıştır (Hata yok)

II. adımda her iki tarafı (x−2) çarpanına bölmüştür. (Hata yok)

III. adımda birbirine eşit iki fonksiyonun x=2 noktasındaki (Hata yok) limit değeri hesaplanmış

IV. adımda g(x) sürekli olduğundan g(x) in limit değeri g(2) olarak alınmış. (Hata yok)

Hiçbir adımda hata yapılmamıştır.

9. $$\frac{g(x)}{f(x)} = (a - 2)x^2 + bx + 1$$

fonksiyonu veriliyor.

Her $x \in \mathbb{R}$ için, $f(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot f'(x) = f^2(x)$

$\left(\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)' = 2(a-2)x + b$ (Her iki tarafın türevini alalım.)

$\dfrac{\overbrace{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}^{f^2(x)}}{f^2(x)} = 2(a-2)x + b$

$\dfrac{f^2(x)}{f^2(x)} = 1 = 2(a-2)x + b$ Her $x \in \mathbb{R}$ için polinom eşitliği

$2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$
$\Rightarrow b = 1$
$a + b = 3$

10. P(x) ve Q(x) birer polinomdur.

$$\text{der}[P'(Q(x)) \cdot Q'(x)] = 19$$

der[P(x)] = m, der[Q(x)] = n olsun.

der[P'(x)] = m−1, der[Q'(x)] = n−1 olur.

$\text{der}[P'(Q(x)) \cdot Q'(x)] = 19$

$n(m-1) + n - 1 = 19$

$m \cdot n - n + n - 1 = 19 \Rightarrow m \cdot n = 20$

$\text{der}[P(x)] \cdot \text{der}[Q(x)] = m \cdot n = 20$

11. $f(x) = x^2$ fonksiyonu veriliyor.

$$\frac{d^2(f(x))}{dx^2} + \frac{d(f(x))}{dx} + f(x) = 10$$

$f(x) = x^2 \Rightarrow \dfrac{d f(x)}{dx} = 2x \Rightarrow \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = 2$

$\underbrace{\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}}_{2} + \underbrace{\dfrac{d f(x)}{dx}}_{2x} + \underbrace{f(x)}_{x^2} = 10$

$2 + 2x + x^2 = 10$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 2$ (pozitif kök)

12. $g^{-1}(2x) = f(3x)$

eşitliği veriliyor.

$g^{-1}(2x) = f(3x) \Rightarrow \cancel{g}(\cancel{g^{-1}}(2x)) = \underbrace{g(f(3x))}_{gof(3x)}$

$\Rightarrow (gof)(3x) = 2x$ (Her iki tarafın türevini alalım.)

$\Rightarrow g'(f(3x)).f'(3x).3 = 2$ (istenilen $g'(f(5)).f'(5)$)

$x = \frac{5}{3}$ için $g'(f(5)).f'(5) = \frac{2}{3}$

13. $f^{-1}(3x-1) = g(x)$ ve $g(1) = f'(1) = 1$

eşitlikleri veriliyor.

$\cancel{f}(\cancel{f^{-1}}(3x-1)) = f(g(x))$

$f(g(x)) = 3x-1$ (Her iki tarafın türevi alınırsa)

$f'(g(x)).g'(x) = 3$

$x=1$ için,

$f'(\underbrace{g(1)}_{1}).g'(1) = 3$

$\underbrace{f'(1)}_{1}.g'(1) = 3 \Rightarrow g'(1) = 3$ olur.

14. Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin saat olarak zamana bağlı yer değişimi km cinsinden,

$f(t) = t^2 + 2t + 5$

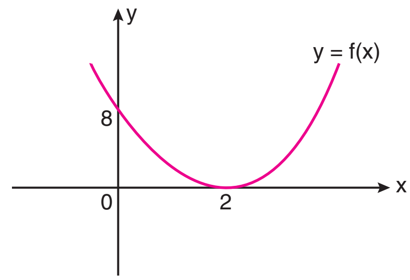
olarak tanımlanmıştır.

$f'(t) = V(t)$

$\Rightarrow V(t) = 2t+2$

$t=2$ için $V(2) = 6$

15.



Şekilde, f(x) parabolünün grafiği verilmiştir.

$f'(x) = 12$

Parabolün denklemini yazalım.

$f(x) = a(x-2)^2$ (0,8) noktasından geçiyor

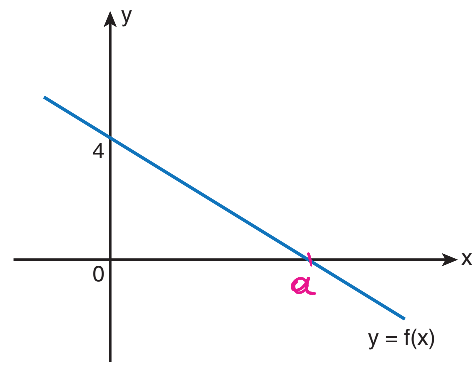
$f(0) = 8$ olmalı $4a = 8 \Rightarrow a = 2$ dur.

$f(x) = 2(x-2)^2$

$\Rightarrow f'(x) = 4(x-2) = 12$

$\Rightarrow x = 5$ olur.

16. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



$f(1) + f'(1) = 1$

f(x) in x eksenini kestiği nokta a olsun.

Doğrunun denklemi $\frac{x}{a} + \frac{y}{4} = 1$

$\Rightarrow y = -\frac{4x}{a} + 4$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{4x}{a} + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{-4}{a}$

$f(1) + f'(1) = -\frac{4}{a} + 4 + \frac{-4}{a} = 1$

$\Rightarrow a = \frac{8}{3}$

$f(x) = -\frac{3}{2}x + 4 \Rightarrow f(4) = -2$ olur.

1. $u = x^2 + 1$

$f(u) = (u^2 - 1)^2 + 1$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

$$\frac{df}{dx} = 2(u^2-1) \cdot 2u \cdot 2x \Big|_{\substack{x=1 \\ u=2}}$$

$x=1$ için $u = 2$ olmalı

$= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 48$

2. $f(x) = |x^2 - x - 6|$

fonksiyonu veriliyor.

$|(x-3)(x+2)|$

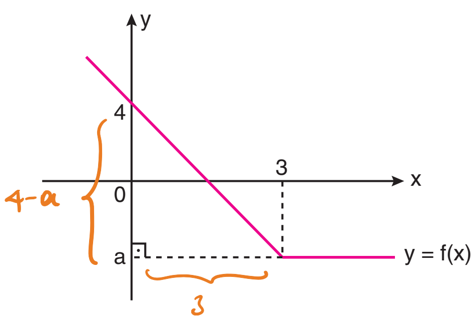
x	+	-2	−	3	+
$\lvert x^2-x-6\rvert$	x^2-x-6		$-x^2+x+6$		x^2-x-6

-2^+

$f(x) = -x^2+x+6 \Rightarrow f'(x) = -2x+1$

$f'(-2) = 5$

3.



Yukarıda, f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$f'(4) + \sum_{k=-2}^{2} f'(k) = -20$$

$(-\infty, 3)$ aralığında eğim $-\frac{4-a}{3}$ (Bu aralıktaki değerler için türevi ifade eder)

$(3, \infty)$ aralığında eğim 0

$$f'(4) + \sum_{k=-2}^{2} f'(k) = -20$$

$\Rightarrow \underbrace{f'(4)}_{0} + \underbrace{f'(-2)}_{-\frac{4-a}{3}} + \underbrace{f'(-1)}_{-\frac{4-a}{3}} + \underbrace{f'(0)}_{-\frac{4-a}{3}} + \underbrace{f'(1)}_{-\frac{4-a}{3}} + \underbrace{f'(2)}_{-\frac{4-a}{3}} = -20$

$\Rightarrow 5\left(-\frac{4-a}{3}\right) = -20 \Rightarrow a = -8$ olur.

4. P(x) ve Q(x) birer polinomdur.

I. der[P'(x) • Q(x)] = 1 ise der[P(x) • Q'(x)] = 1 dir.

II. der[P'(x) • Q(x)] = 2 ise der[P(x) • Q'(x)] = 1 dir.

III. der[P(x) • Q(x)] = 4 ise der[P'(x) • Q'(x)] = 2 dir.

der[P(x)] = m ve der[Q(x)] = n olsun.

✓ I. der[P'(x).Q(x)] = 1 ise der[P(x).Q'(x)] = 1

$m-1+n = 1$ $\qquad m + n-1 = 1$

✗ II. der[P'(x).Q(x)] = 2 ise der[P(x).Q'(x)] = 1

$m-1+n = 2$ $\qquad m+n-1 = 1$

KESİN YANLIŞ.

✓ III. der[P(x).Q(x)] = 4 ise der[P'(x).Q'(x)] = 2

$m+n = 4$ ise $\qquad m-1+n-1 = 2$

Yalnız II

5. $f(x) = x^{2019}$ olmak üzere,

$$\left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=1}$$

$f''(1)$ isteniyor.

$f'(x) = 2019 \cdot x^{2018}$

$f''(x) = 2019 \cdot 2018 \cdot x^{2017}$

$f''(1) = 2019 \cdot 2018$

$2019 \cdot 2018 = \ldots\ldots\ldots 2$ $\quad (8 \cdot 9 = 72$ olduğunda$)$

Cevap 2

6. $x > 0$ olmak üzere,

$$g(x) = f\left(\frac{\sqrt{x}}{f(x)}\right)$$

$$f(1) = f'(1) = 4 \text{ ve } f'\left(\frac{1}{4}\right) = 8$$

$$g'(x) = f'\left(\frac{\sqrt{x}}{f(x)}\right) \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot f(x) - \sqrt{x}\cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

$x=1$ için

$$g'(1) = f'\left(\frac{1}{f(1)}\right) \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot f(1) - f'(1)}{f^2(1)}$$

$$g'(1) = \underbrace{f'\left(\frac{1}{4}\right)}_{8} \cdot \frac{\frac{1}{2}\cdot 4 - 4}{16} \Rightarrow g'(1) = -1$$

7. $f(x)$, türevlenebilen bir fonksiyon olmak üzere,

$f(a) = b$, $f(b) = a$ ve $g(x) = (f \circ f \circ f \circ f)(x)$

veriliyor.

$M = g'(a)$, $N = g'(b)$

$$g'(x) = f'(f(f(f(x)))).f'(f(f(x))).f'(f(x)).f'(x)$$

$x=a$ için

$$g'(a) = f'(f(\underbrace{f(b)}_{a})).f'(\underbrace{f(b)}_{a}).f'(b).f'(a)$$

$$g'(a) = f'(b).f'(a).f'(b).f'(a)$$

$x=b$ için

$$g'(b) = f'(a).f'(b).f'(a).f'(b)$$

$g'(a) = g'(b)$ olur. $M=N$ dır.

8. f ve g türevlenebilen fonksiyonlardır. f fonksiyonunun tersi g olmak üzere,

$f(x) = 4x^3$

$g(x) = f^{-1}(x)$ $\qquad$ $g'(32) = (f^{-1})'(32)$ isteniyor.

$f(x) = 4x^3 \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(4x^3) = x}$

Her iki tarafın türevini alalım.

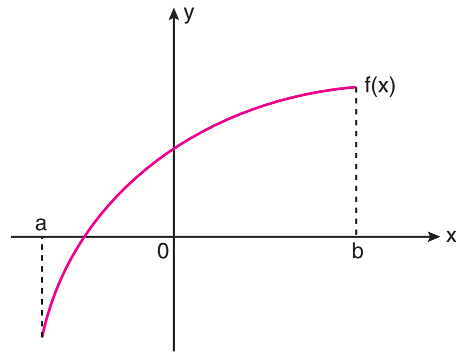
$$(f^{-1})'(4x^3).12x^2 = 1$$

$x=2$ için

$$(f^{-1})'(32).48 = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(32) = \frac{1}{48} \; //$$

9.



Şekilde, f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki grafiği verilmiştir.

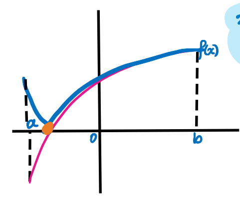
I. |f(x)|

II. f(|x|)

III. f(x)+1

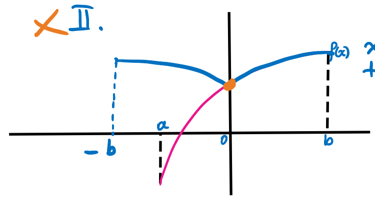
IV. –f(x)

✗ I.



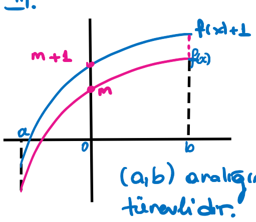
x=a noktasında türev yoktur.

✗ II.



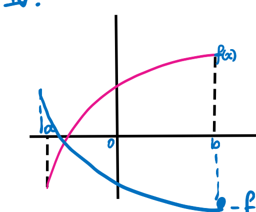
x=0 noktasında türev yoktur.

✓ III.



(a,b) aralığında türevlidir.

✓ IV.



(a,b) aralığında türevlidir.

10. $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomu veriliyor. a, b, c katsayıları bir aritmetik dizinin sırasıyla ardışık 3 terimidir.

$P(1) = P(-1)$

$$P(x) = a(x-1)(x+1)+k = ax^2 - a + k = ax^2+bx+c$$

$a \;,\; 0 \;,\; -a+k$ aritmetik dizi oluşturuyor.

$0 - a = -a + k \Rightarrow k = 0$ olmalı.

$P(x) = ax^2 + 0.x - a$ $\qquad$ Katsayılar a, $b=0$, $c=-a$

$P'(x) = 2ax$

✗ A) $P'(b) = P'(0) = 0$

✓ B) $P'(a)+P'(b)+P'(c) = P'(a)+P'(0)+P'(-a) = 2a^2 - 2a^2 = 0$

✗ C) $P'(c) = P'(-a) = -2a^2$

✗ D) $P'(a) = P'(c) \Rightarrow 2a^2 \neq -2a^2$

✗ E) $P'(a).P'(c) = P'(a).P'(-a) \Rightarrow 2a^2.(-2a^2) \neq 0$

11. $f(x)=\dfrac{4x+1}{x-4}$

fonksiyonu veriliyor.

$f(x)=\dfrac{4x+1}{x-4} \Rightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{4x+1}{x-4}$ olduğundan

$f(x)=f^{-1}(x)$

$(\cancel{fofofof})(x)=x$

$(f=f^{-1}$ olduğundan$)$

$(fofofof)(x)=x$

$(fofofof)'(x)=1$

$(fofofof)'(2)=1$

12. Satürn ve Ay'ın yüzeylerinde belli bir yükseklikten aynı anda serbest düşmeye bırakılan iki cismin "konum-zaman" fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$s_{satürn}(t) = 5,2 \cdot t^2$

$s_{ay}(t) = 0,8 \cdot t^2$

a ve b birer pozitif tam sayı olmak üzere, Satürn'deki cismin a. saniyedeki hızı, Ay'daki cismin b. saniyedeki hızına eşittir.

$S'_{satürn}(t)=10,4\cdot t$

$S'_{ay}(t)=1,6\cdot t$

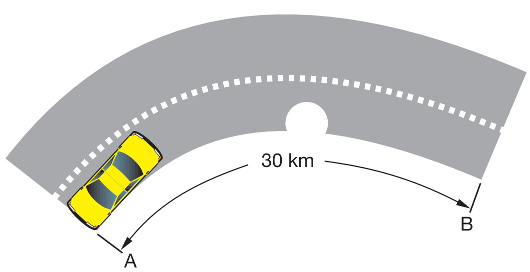
$S'_{satürn}(a)=S'_{ay}(b) \Rightarrow 10,4\cdot a=1,6\cdot b$

$13a=2b$

$a=2$ için $b=13$ alınırsa

$a+b=15$

13. Bir araç A noktasından, 30 km uzaktaki B noktasına gitmek üzere hareket ediyor.



x km gidilirse kalan yol $30-x$ olur.

$f(x)=30-x \longrightarrow f(5)=25$

$f'(x)=-1 \longrightarrow f'(5)=-1$

$f''(x)=0 \longrightarrow f''(5)=0$

$f(5)+f'(5)+f''(5)=24$

14. Doğrusal bir yolda hareket eden bir aracın t zamanına (saniye) bağlı konum fonksiyonu,

$s(t) = t^3 - 4t^2 + 4t$

biçimindedir ve s(t) nin birimi metredir.

$s'(t)=v(t)=3t^2-8t+4=0 \Rightarrow$ $3t \;\; -2 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$; $t \;\; -2 \Rightarrow t=2$

$a(\frac{2}{3})=6\cdot\frac{2}{3}-8=-4$ ... x

$v'(t)=a(t)=6t-8=0 \Rightarrow t=\frac{4}{3} \Rightarrow v(\frac{4}{3})=3\cdot\frac{16}{9}-8\cdot\frac{4}{3}+4$

$=-\frac{16}{3}+4=\frac{-4}{3}$ ... y

$x+y=-4+(\frac{-4}{3})=\frac{-16}{3}$

x in değeri x+y değeri en az olsun diye $x=\frac{2}{3}$ seçildi.

15. $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<2\\ x^2-ax+b, & x\geq 2\end{cases}$

$g(x) = |x - 2|$

fonksiyonları veriliyor.

x=2 de sürekli olmak zorunda

$\lim_{x\to 2^+}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 2^-}(f(x)+g(x)) = f(2)+g(2)$

$4-2a+b+0 = 5+0 = 4-2a+b+0$

$\Rightarrow 2a-b=-1$

x=2 de türevli olduğundan

$f'(2^+)+g'(2^+) = f'(2^-)+g'(2^-)$

$4-a+1 = 2+(-1) \Rightarrow a=4,\; b=9 \;\} \; a+b=13$

1. $f(x) = x^2 + mx + m + 1$

fonksiyonuna $x=-1$ apsisli noktada çizilen teğetin eğimi $f'(-1)=3$

$\Rightarrow f'(x)=2x+m$

$f'(-1)=-2+m=3 \Rightarrow m=5$

2. $f(x) = x^3 - ax + 1$

$x=2$ noktasında çizilen teğetin eğimi $f'(2)=\tan 135° = -1$

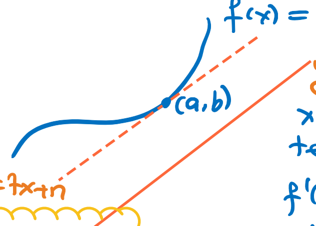
$f'(x)=3x^2-a$

$f'(2)=12-a=-1 \Rightarrow a=13$

3. $f(x) = x^3 - 2x + 1$

fonksiyonuna x = a apsisli noktasından çizilen teğet, y = 7x – 1 doğrusuna paraleldir.

$f(x)=x^3-2x+1$



$d_1 // d_2 \Rightarrow m_1=m_2$

$x=a$ noktasındaki teğetin eğimi 7 dir.

$f'(x)=3x^2-2$

$f'(a)=7 \Rightarrow 3a^2-2=7$

$a=\mp\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}.\sqrt{3}=-3$

4. $f(x) = x^3 - bx^2 + ax + 4$

$g(x) = x^2 - bx + 3$

x eksenine paralel teğetlerin eğimi 0 dır.

Dolayısıyla $f'(1)=0$ ve $g'(1)=0$ dır.

$f'(x)=3x^2-2bx+a \Rightarrow f'(1)=3-2b+a=0$

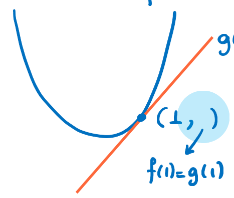
$g'(x)=2x-b \Rightarrow g'(1)=2-b=0 \Rightarrow b=2$

$a=1$

$\Rightarrow a+b=3$

5. $y = x^2 - ax + b + 1$

$f(x)=x^2-ax+b+1$



$g(x)=x-4 \Rightarrow$ eğim $=1$

$x=1$ noktasındaki teğetin eğimi 1 olduğundan

$f'(1)=1$

$f(1)=g(1)$ ($x=1$ noktası parabol ve doğrunun ortak noktası)

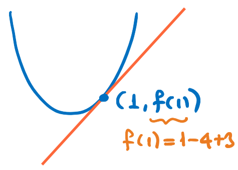
$f'(x)=2x-a$

$f'(1)=2-a=1 \Rightarrow \boxed{a=1}$

$f(1)=g(1)$ eşitliğinden $1-a+b+1=-3 \Rightarrow \boxed{b=-4}$

$\Rightarrow a+b=-3$

6. $f(x) = x^2 - 4x + 3$



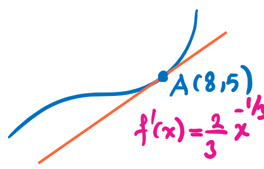
$f'(x)=2x-4$

$f'(1)=-2$ ($x=1$ noktasında çizilen teğetin eğimi)

(1,0) noktasından geçen eğimi -2 olan doğrunun denklemi

$y-0=-2(x-1) \Rightarrow y=-2x+2$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + a$



$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}$

→ nokta eğriyi sağlar.

$f(8)=5$ eşitliğinden.

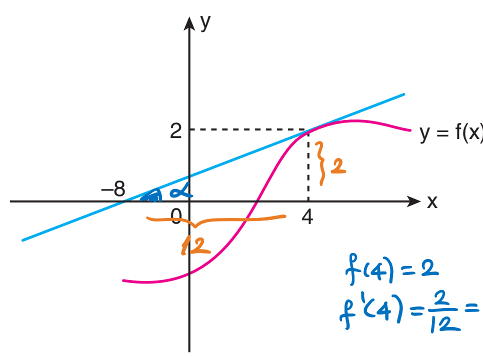
$\sqrt[3]{64}+a=5 \Rightarrow a=1$ olur.

$x=8$ noktasında çizilen teğetin eğimi $f'(8)=b$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{8}}=b \Rightarrow b=\frac{1}{3}$

$a+b=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

8.



$f(4)=2$

$f'(4)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

Şekildeki y = f(x) eğrisi d doğrusuna x = 4 apsisli noktada teğettir.

$g(x) = f^2(x)$

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$g'(x)=2f(x).f'(x)$

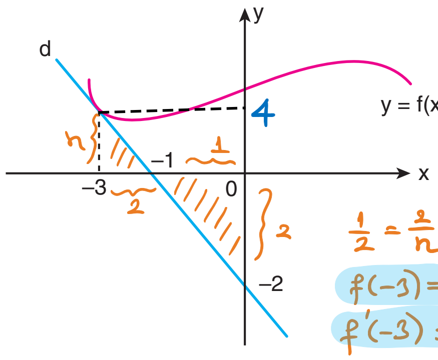
$g'(4)=2\underbrace{f(4)}_{2}.\underbrace{f'(4)}_{\frac{1}{6}}$

$g'(4)=\frac{2}{3}$

grafik üzerinde $f(4)=2$

Teğetin eğimi $f'(4)=\frac{1}{6}$

9.



$\frac{1}{2} = \frac{2}{h} \Rightarrow h = 4$

$f(-3) = 4$

$f'(-3) = -2$ (eğim)

Şekilde verilen y = f(x) eğrisi d doğrusuna x = –3 apsisli noktada teğettir.

$g(x) = \frac{x}{f(x)}$ eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$$g'(x) = \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{f^2(x)}$$

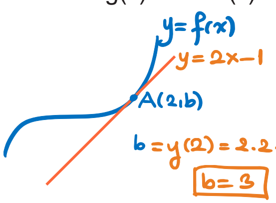
x = –3 için

$$g'(-3) = \frac{f(-3) + 3f'(-3)}{f^2(-3)}$$

$$g'(-3) = \frac{4 + 3 \cdot (-2)}{16} = \frac{-1}{8}$$

10. y = f(x) fonksiyonuna üzerindeki A(2, b) noktasından çizilen teğetin denklemi y = 2x – 1 dir.

$g(x) = x^2 \cdot f(x)$



$b = y(2) = 2 \cdot 2 - 1$

$\boxed{b = 3}$

$f(2) = 3$

$f'(2) = 2$ (Teğetin eğimi)

$g(x) = x^2 \cdot f(x)$ fonksiyonuna x = 2 noktasında çizilen teğetin eğimi $g'(2)$ dir.

$g'(x) = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x)$

$g'(2) = 4\underbrace{f(2)}_{3} + 4 \cdot \underbrace{f'(2)}_{2}$

$g'(2) = 20$

11. $f(x) = x^3 - mx^2 + nx + 1$

fonksiyonu veriliyor.

$f'(x)$ fonksiyonuna x = 2 apsisli noktasından çizilen teğeti $f''(x)$ doğrusudur.

$f'(x) = 3x^2 - 2mx + n$ fonksiyonunun teğet doğrusu

$f''(x) = 6x - 2m$ olduğuna göre

$f'(2) = f''(2)$ ve $(f')'(2) = \underbrace{f''(2) = 6}_{\text{eğim}}$

$12 - 4m + n = 12 - 2m$

$\boxed{n = 6}$

$f''(2) = 12 - 2m = 6 \Rightarrow \boxed{m = 3}$

$n - m = 6 - 3 = 3$

12. P(x), ikinci dereceden başkatsayısı 1 olan bir polinomdur.

$P(1) = P'(1) = 0$

I. Yol

$P(x) = 1 \cdot (x-1) \cdot (x-m)$

$P'(x) = 1 \cdot (x-m) + (x-1) \cdot 1$

$P'(1) = 1 - m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 1}$

$P(x) = (x-1)^2$ olur.

x = 3 noktasında çizilen teğetin eğimi $P'(3) = ?$

$P'(x) = 2(x-1)$

$P'(3) = 4$

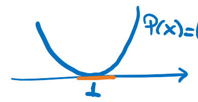
II. Yol:

x = 1 de

$P(1) = 0$ ise polinomun kökü

$P'(1) = 0$ ise x'e paralel teğet.

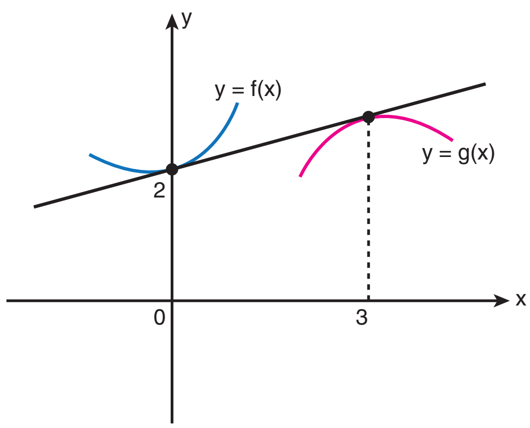
Başkatsayı 1 olduğundan



$P'(x) = 2(x-1)$

$P'(3) = 4$ olur.

13. Aşağıda, f ve g fonksiyonlarının grafikleri ve bu grafiklere x = 0 ve x = 3 apsisli noktalarında teğet olan doğru gösterilmiştir.



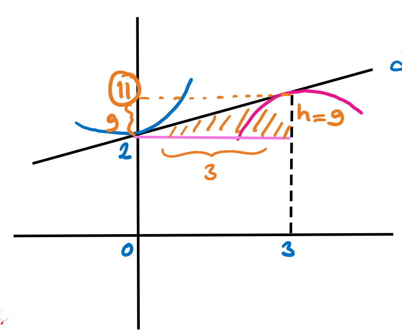
$2f'(0) + g'(3) = 9$

d doğrusu x = 0 da f(x)'e teğet

x = 3 de g(x)'e teğet

$f'(0) = g'(3) = m$

$2m + m = 9 \Rightarrow m = 3$



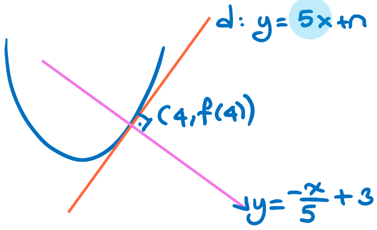
$m = 3 = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 9$

$f(3) = 11$ olur.

1. $f(x) = x^2 + mx - 6$ parabolünün $x = 4$ apsisli noktasındaki teğeti,

$$y = \frac{-x}{5} + 3$$

$\boxed{d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 . m_2 = -1}$



$-\frac{1}{5} . m_{Teğet} = -1$

$\Rightarrow m_{Teğet} = 5$

$f'(4) = 5$ olmalı

$f'(x) = 2x + m$

$f'(4) = 8 + m = 5$

$\Rightarrow m = -3$

2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x + 1$

fonksiyonuna $x = a$ noktasından çizilen teğet, x ekseni ile pozitif yönde geniş açı oluşturmaktadır.

x = a noktasındaki teğet x ekseni ile pozitif yönde geniş açı yapıyorsa eğimler (o noktadaki türev değeri) negatif olur.

$f'(x) = x^2 - 4$

$f'(a) < 0 \Rightarrow a^2 - 4 < 0 \Rightarrow a^2 < 4$

$-2 < a < 2$

$a \in (-2, 2)$ dur.

3. $f(x^2 - x) = x \cdot f(x) - x - 1$

eşitliği veriliyor.

$x = 0$ için $f(0) = -1$

f(x) fonksiyonuna $x = 0$ noktasında çizilen teğetin eğimi $f'(0)$ dır.

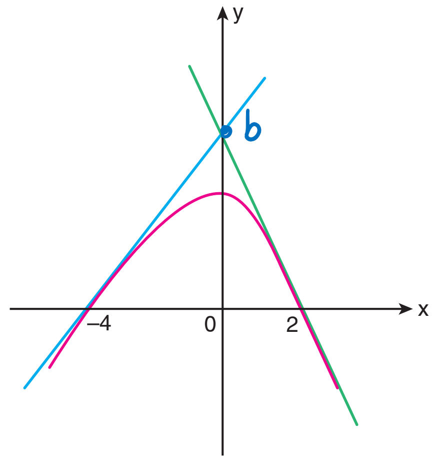
$f'(x^2 - x) . (2x - 1) = 1 . f(x) + x . f'(x) - 1$

$x = 0$ için

$f'(0) . (-1) = \underbrace{f(0)}_{-1} - 1$

$f'(0) = 2$ olur.

4.



Yukarıda grafiği verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = -4$ ve $x = 2$ noktasındaki teğetleri y ekseni üzerinde kesişmiştir.

* f fonksiyonuna $x = -4$ noktasında çizilen teğetin eğimi $m_1 = f'(-4)$
* f fonksiyonuna $x = 2$ noktasında çizilen teğetin eğimi $m_2 = f'(2)$

doğruların y eksenini kestiği nokta (0, b) olsun.

$f'(-4) = \frac{b}{4}$

$f'(2) = -\frac{b}{2}$

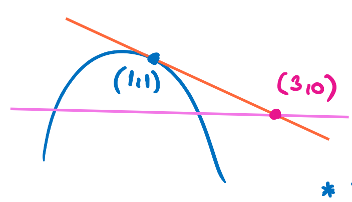
$\frac{f'(-4)}{f'(2)} = \frac{\frac{b}{4}}{-\frac{b}{2}} = -\frac{1}{2}$

5. $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = mx^2 + nx + 1$

parabolü üzerinde bulunan (1, 1) noktasından çizilen teğet doğrusu x– eksenini (3, 0) noktasında kesmektedir.

Çözümde kullanılan çizim temsilidir.



(1,1) noktası parabolü sağlar

$f(1) = 1$

$m + n + 1 = 1 \Rightarrow m + n = 0$

* Teğetin eğimi

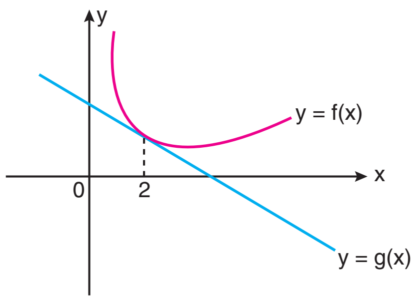
$f'(1) = \frac{1 - 0}{1 - 3}$ (iki noktası bilinen doğrunun eğimi)

$f'(x) = 2mx + n$

$2m + n = -\frac{1}{2}$

$\left.\begin{array}{l} -/ m + n = 0 \\ 2m + n = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m = -\frac{1}{2} \\ n = \frac{1}{2} \end{array}\right\} m - n = -1$

6. Şekilde, f(x) fonksiyonuna x = 2 apsisli noktasından g(x) teğeti çizilmiştir.



$g^{-1}(x) = \dfrac{6-x}{2}$

$f'(2)$, g(x) teğetinin eğimidir.

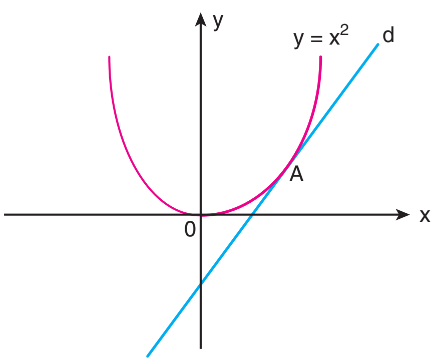
$g\left(\dfrac{6-x}{2}\right) = x$

x yerine 6−2x yazalım.

$g\left(\dfrac{6-(6-2x)}{2}\right) = 6-2x$

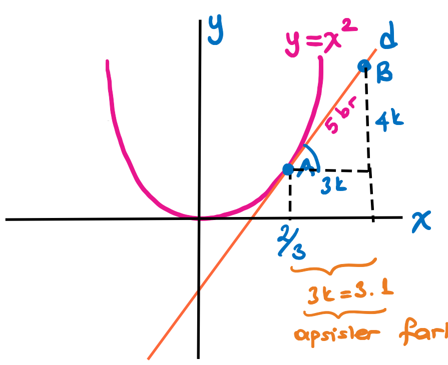
$g(x) = 6-2x$ eğimi −2 dir.

7.



Şekilde verilen d doğrusu $y = x^2$ parabolüne apsisi $\dfrac{2}{3}$ olan A noktasında teğettir. d doğrusunun üzerinde A noktasından 5 birim uzaklıkta bir B noktası alınıyor.

|AB| = 5 birim



Teğetin eğimi $f'\left(\frac{2}{3}\right)$

$f'(x) = 2x$

$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

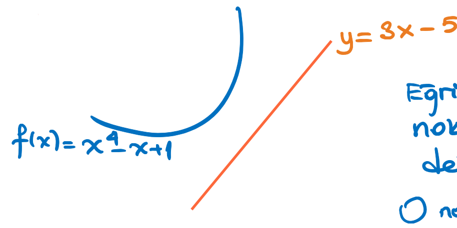
$5k = 5 \quad k = 1$

$3k = 3 \cdot 1$

apsisler farkı 3 tür.

8. $f(x) = x^4 - x + 1$

Grafik Temsili çizilmiştir.



Eğrinin doğruya en yakın noktası paralel teğetin değme noktasıdır.

O noktadaki teğetin eğimi 3 olmalıdır.

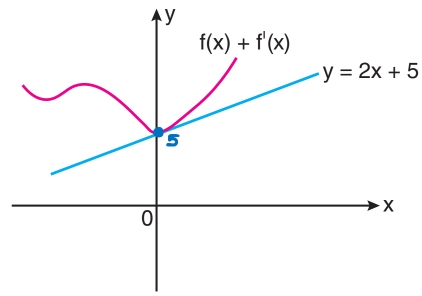
$f'(x) = 4x^3 - 1 = 3 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 1$

(1,1) noktasıdır.

$1+1 = 2$

9. Aşağıda, $f(x) + f'(x)$ fonksiyonunun grafiği ve bu grafiğe x = 0 apsisli noktasından çizilen teğet gösterilmiştir.



doğrunun y eksenini kestiği nokta (0,5) tir. Bu nokta $f(x)+f'(x)$ fonksiyonunuda sağlar. Yani $f(0)+f'(0) = 5$ tir.

$f(x)+f'(x)$ fonksiyonunun x=0 noktasındaki türev değeri $f'(0)+f''(0)$ doğrunun eğimi olan 2 dir.

$f'(0)+f''(0) = 2$

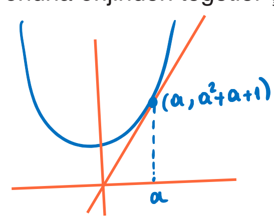
$f(0)+f'(0) = 5$

$\ominus\ f'(0)+f''(0) = 2$

$f(0) - f''(0) = 3$

10. $f(x) = x^2 + x + 1$

fonksiyonuna orijinden teğetler çiziliyor.



d doğrusunun eğimi $f'(a)$

eğim aynı zamanda analitik geometriden

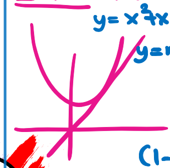
$\dfrac{a^2+a+1}{a} = \underbrace{f'(a)}_{2a+1}$

$a^2+a+1 = 2a^2+a$

$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = -1$

$f'(1)+f'(-1) = 3 - 1 = 2$

II. YOL (Parabol)



$y = x^2+x+1$

$y = mx$

$x^2+x+1 = mx$

$x^2+(1-m)x+1 = 0$

Teğet old. dan $\Delta = 0$ dır.

$(1-m)^2 - 4 = 0$

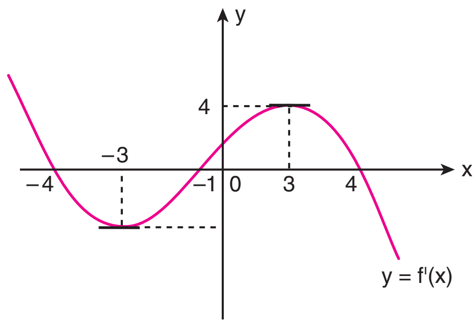
$1-m = 2 \quad \vee \quad 1-m = -2$

$m = -1 \quad m = 3$

$-1+3 = 2$

ACİL MATEMATİK

11.



Yukarıda, y = f'(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$g(x) = x^2 \cdot f'(x + 1)$

Grafik üzerinde $f'(3)=4$, $f''(3)=0$ bilgisine ulaşılır.

$g(x) = x^2 \cdot f'(x+1)$

$\Rightarrow g'(x) = 2x \cdot f'(x+1) + x^2 \cdot f''(x+1)$

$x=2$ için

$g'(2) = 4\underbrace{f'(3)}_{4} + 4 \cdot \underbrace{f''(3)}_{0}$

$g'(2) = 16$

Rolle Teoremi:

f: [a, b] → ℝ fonksiyonu sürekli ve ∀x ∈ (a, b) için türevlenebilir olsun. Eğer f(a) = f(b) ise (a, b) aralığında f'(c) = 0 olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

12. $f(x) = x^3 - 2x^2 + a$

Rolle teoreminin uygulanabilmesi için [0, b] aralığının uç noktalarında eşit görüntülere sahip olması gerekir.

$f(0) = f(b)$

$a = b^3 - 2b^2 + a$

$b^2(b-2) = 0$

$b=0$ veya $b=2$

$b=0$ olamaz [0,0] aralık değildir.

$b=2$ olmalı.

13. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \ x < 1 \\ 2x & , \ x \geq 1 \end{cases}$

$f(-1)=f(5)$ eşitliği sağlanıyor

$x<1$ için $(x^2+1)'=0 \Rightarrow 2x=0$ $x=0$

$x\geq 1$ için $(2x)' \neq 0$ $2 \neq 0$ olduğundan 0 noktası Rolle Teoremini sağlayan noktadır.

$f(0)=1$ $(0,1)$

14. f(x), ℝ de türevli bir fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = \begin{cases} g(x) & , \ x > 2 \\ x^2 - x & , \ x \leq 2 \end{cases}$

fonksiyonunun [–1, 3] aralığında Rolle teoremine uygun en az bir noktası vardır.

* Rolle teoremine uygun ise

$\underbrace{f(-1)}_{2} = \underbrace{f(3)}_{g(3)}$

Türevlenebilir olduğundan,

$\underbrace{\lim_{x\to 2^+} f(x)}_{g(2)} = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 2$ ve $\underbrace{f'(2^+)}_{g'(x)|_{x=2}} = f'(2^-) = (x^2-x)'|_{x=2}$

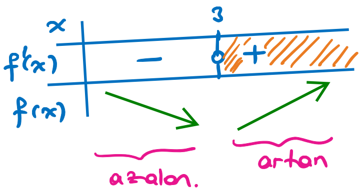
$g'(2)=3$

$g(2)+g'(2)-g(3) = 2+3-2$
$= 3$

ACİL MATEMATİK

1. $f(x) = x^2 - 6x + 4$

$f(x) = x^2 - 6x + 4 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$
(işaretini inceliyelim)
$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$



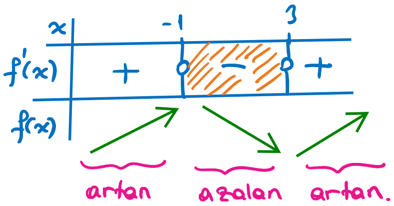
Artan olduğu aralık $[3, \infty)$

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5$$

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5 \Rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 3$
(işaretini inceliyelim).

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$
$x = -1 \vee x = 3$



Azalan olduğu aralık $[-1, 3]$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + kx + 2$$

$f(x) = x^3 + 6x^2 + kx + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 12x + k$
$f(x)$ in daima artan olması için $f'(x) = 3x^2 + 12x + k$
ifadesi için $\Delta \leq 0$ koşulu sağlanmalı.

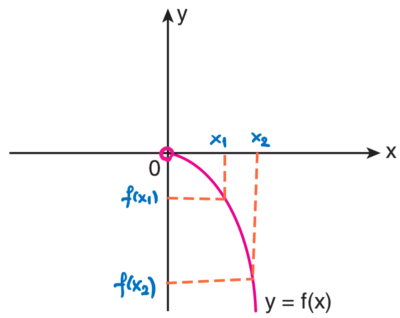
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 3 \cdot k \leq 0$ olmalı.

$144 - 12k \leq 0 \Rightarrow 12 \leq k$

$k \in [12, \infty)$

4. $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,



Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

✓ I. f fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığında negatif değerli azalan bir fonksiyondur.

✓ II. $f^2(x)$ fonksiyonu artandır.

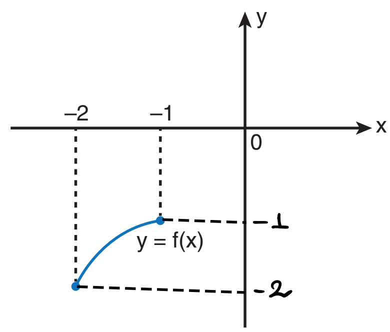
✓ III. $x \cdot f(x)$ fonksiyonu azalandır.

✓ I. Tüm $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ için
$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ olduğundan
$f(x)$ azalandır $(f'(x) < 0)$ ve
Tüm $x \in (0, \infty)$ için $f(x) < 0$ olduğundan
negatif değerlidir.

✓ II. $[f^2(x)]' = 2 \underset{-}{f(x)} \cdot \underset{-}{f'(x)} > 0$ $f^2(x)$ artandır.

✓ III. $(x \cdot f(x))' = \underset{-}{f(x)} + \underset{+}{x} \cdot \underset{-}{f'(x)} < 0$ $x \cdot f(x)$ azalandır.

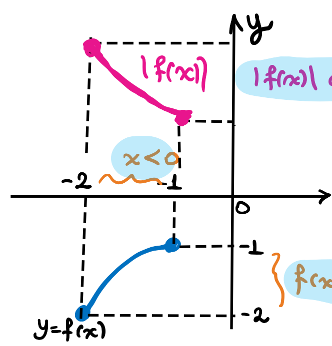
5. Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun [–2, –1] aralığındaki grafiği verilmiştir.



I. $y = f^2(x)$

II. $y = (f \circ f)(x)$

III. $y = |f(x)|$

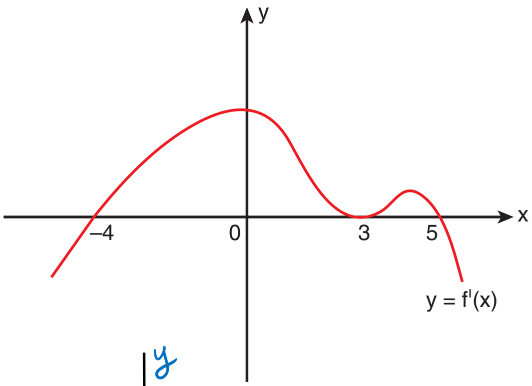


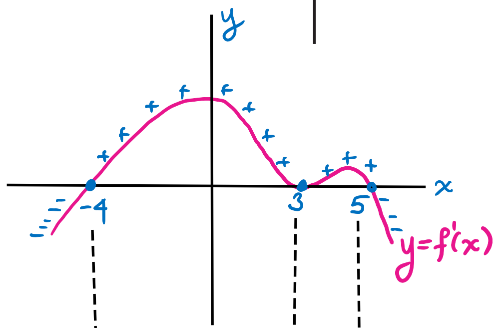
✓ I. $[f^2(x)]' = 2 \underset{-}{f(x)} \cdot \underset{+}{f'(x)} < 0$
$f^2(x)$ azalan

✗ II. $(f \circ f)'(x) = \underset{+}{f'(f(x))} \cdot \underset{+}{f'(x)} > 0$
$(f \circ f)(x)$ artan.

✓ III. $|f(x)|$ grafik üzerinde yorumlandı azalandır.

6. Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



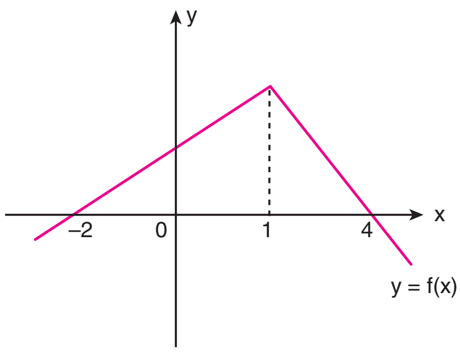


x		-4		3		5	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘

artan olduğu aralık

Artan olduğu aralık $[-4, 5]$

7.

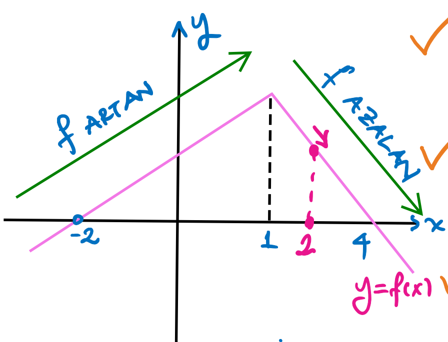


Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

I. f fonksiyonu (–∞, 1] aralığında artandır.

II. f fonksiyonu [1, ∞) aralığında azalandır.

III. $f'(2) < 0$



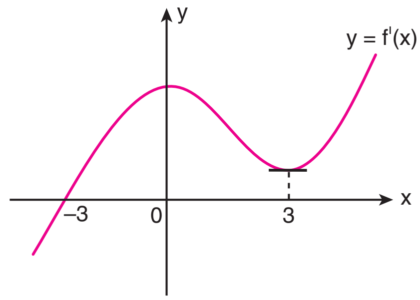
✓ I. f, $(-\infty, 1]$ aralığında artan

✓ II. f, $[1, \infty)$ aralığında azalan

✓ III. $x=2$ noktasında eğim negatif olduğundan $f'(2) < 0$

Cevap I-II-III

8.

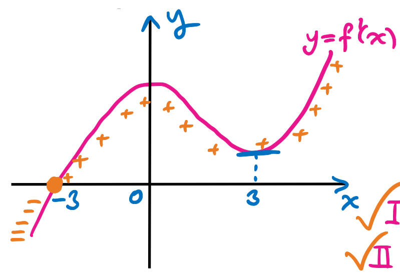


Yukarıdaki şekilde f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

I. f fonksiyonu [–3, ∞) aralığında artandır.

II. f(–5) > f(–4)

III. f(1) > f(2)



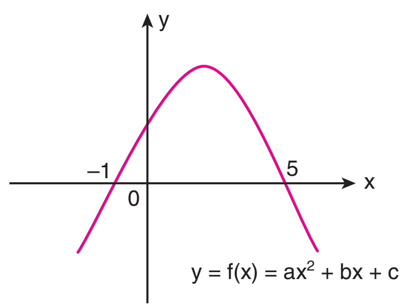
x		-3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗
	AZALAN $(-\infty, -3]$		ARTAN $[-3, \infty)$

✓ I. f, $[-3, \infty)$ aralığında artandır.

✓ II. $-5, -4$ noktaları azalan bölgede olduğundan $f(-5) > f(-4)$

✗ III. 1 ve 2 artan bölgede olduğundan $f(1) < f(2)$ olmalı!

9.



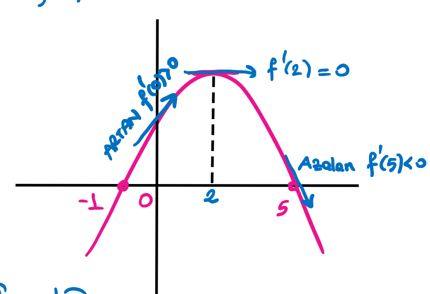
Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

✓ I. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f(x) - f(5)}{x - 5} < 0$, $f'(5) < 0$

✓ II. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0$, $f'(2) = 0$

✓ III. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} > 0$, $f'(0) > 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$



I, II, III doğru

10. $f(x)=\begin{cases} x^2-2 &, x\le 0 \\ x+2 &, x>0 \end{cases}$

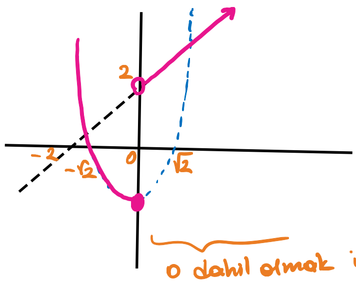
$x\le 0$ için $(x^2-2)'=2x\le 0$ Azalan

$x>0$ için $(x+2)'=1>0$ artan

Ama

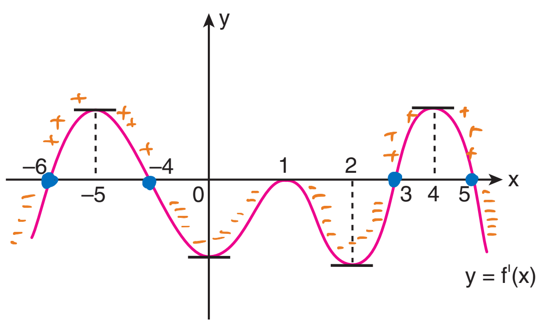
$0<0^+$ için $f(0)<f(0^+)$ olduğundan artan aralığa 0 dahil edilir.

* Cevap $[0,\infty)$ aralığıdır.

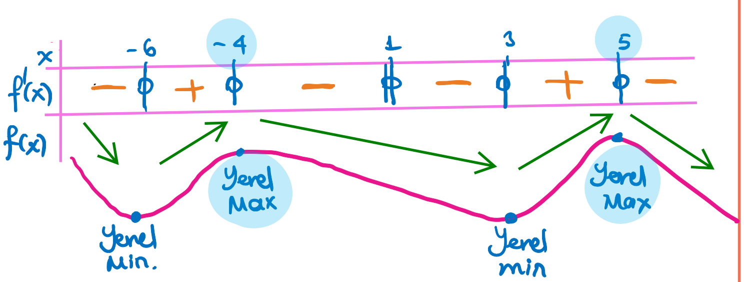


0 dahil olmak üzere grafik sağa doğru artmıştır.

11.

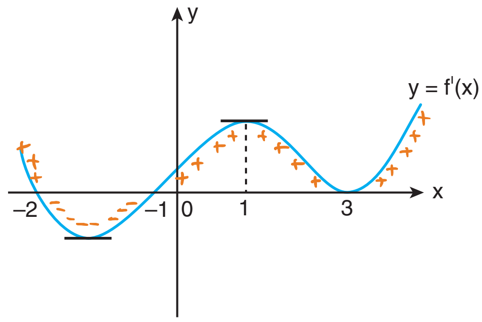


Şekilde, y = f'(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$-4+5=1$

12.



Yukarıda, y = f'(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

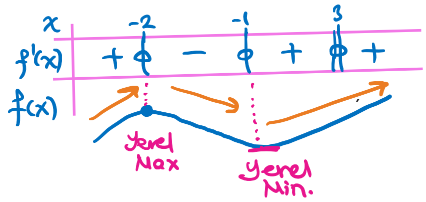
√ I. x = –2 apsisli noktada f fonksiyonunun yerel maksimumu vardır.

X II. x = –1 apsisli noktada f fonksiyonunun yerel maksimumu vardır.

√ III. f'(3) = 0 olmasına rağmen y = f(x) fonksiyonunun x = 3 apsisli noktada yerel ekstremum yoktur.

X IV. f(–5) > f(–4) tür.

√ V. y = f'(x) fonksiyonunun x = 1 apsisli noktasında yerel maksimumu vardır.



f(x) in x = -2 de yerel Max., x = -1 de yerel Minimumu var ve x = 3 te türev 0 olmasına rağmen işaret değişmediğinden ekstrem yoktur.

X IV. -5 ve -4 noktaları artan aralıktadır. $-5<-4$ iken $f(-5)<f(-4)$ olmalı.

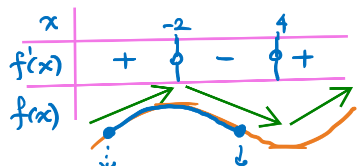
√ V. f(x) grafiğine baktığımızda x = 1 de grafik tepe yapmıştır. f'(x) in yerel Max noktasıdır.

13. $f:[-3,0]\to\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-8x+1$$

fonksiyonu veriliyor.

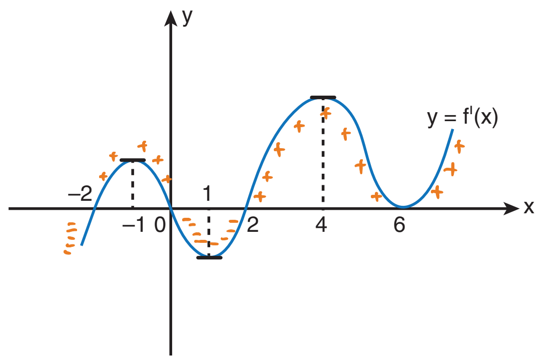
$f'(x)=x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$



$[-3, 0]$ hangi noktada en küçük değeri aldığını bilmek için görüntülerine bakalım. $f(-3)=7$, $f(0)=1$ en küçük değeri

ACİL MATEMATİK

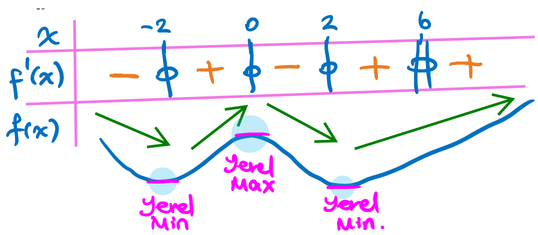
14. Aşağıda y = f(x) fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



I. y = f(x) fonksiyonunun 3 tane ekstremum noktası vardır.

II. f(3) < f(4) < f(5) tir.

III. y = f(x) fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi 6'dır.



I. f(x) in tabloda görüldüğü üzere 3 tane ekstremum noktası vardır.

II. 3, 4 ve 5 noktaları artan aralığa girdiğinden $3<4<5$ için $f(3)<f(4)<f(5)$ tir.

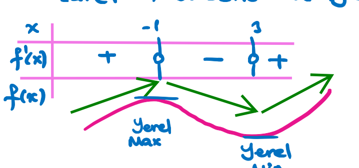
III. $x=6$ da $f'(6)=0$ olmasına rağmen türev işaret değiştirmediğinden f(x) in ekstremum noktası yoktur.

15. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$f'(x) = 3.(x-3)(x+1)$

işaret tablosunu inceleyelim.

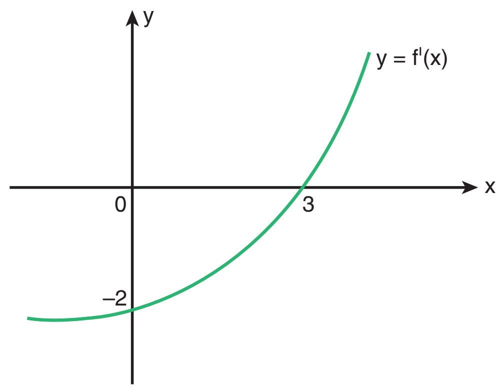


Yerel Max değeri $f(-1) = 6$

Yerel Min değeri $f(3) = -26$

$f(-1) + f(3) = 6 - 26 = -20$

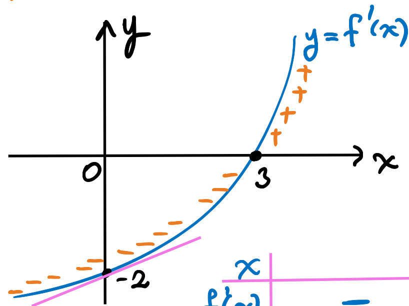
16. Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun türevinin grafiği gösterilmiştir.

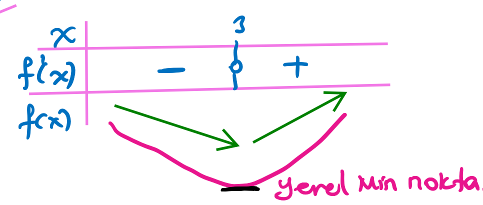


I. y = f(x) fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi 3'tür.

II. f(1) > f(2) > f(3) tür.

III. f'(0) > f''(0) dır.





I. Yerel Min. noktanın apsisi tablodan $x=3$ olduğu görülüyor.

II. 1, 2 ve 3 noktaları azalan aralığa girdiğinden $1<2<3$ için $f(1)>f(2)>f(3)$ olur.

III. $f'(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde $x=0$ noktasında çizilen teğetin eğimi pozitif olduğundan $f''(0)>0$

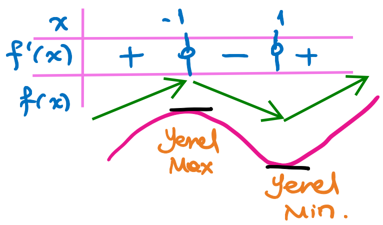
Yine $x=0$ noktasında görüntü $f'(0)=-2$

Dolayısıyla $f''(0) > f'(0)$ olmalı.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 - 3x - 1$

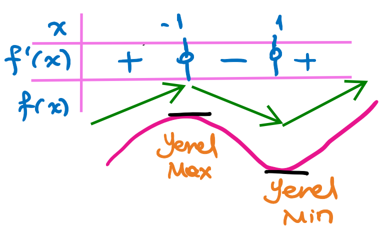
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$



Yerel Max. noktanın ordinatı $f(-1) = 1$

2. $f(x) = 2x^3 - 6x + n$

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1)$



$f(-1) = 8$ eşitliğinden

$-2 + 6 + n = 8 \Rightarrow n = 4$ olur.

3. a ve b birer gerçek sayıdır.

$f(x) = x^3 - (a + b)x^2 + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 2(a+b)$ ifadesinin

kökleri ekstremum noktaların apsisleridir.

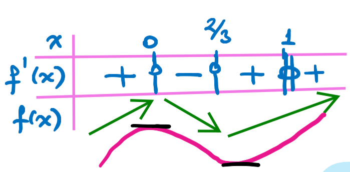
Kökler Toplamı $x_1 + x_2 = \dfrac{-B}{A}$

$-\dfrac{-2(a+b)}{3} = 4 \Rightarrow a + b = 6$ olur.

4. $f(x) = (x^3 - x^2)^3$

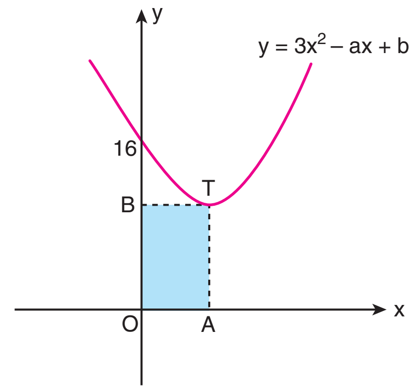
$f'(x) = 3(x^3 - x^2)^2 \cdot (3x^2 - 2x)$

$f'(x) = 3 \cdot x^5 \cdot (x-1)^2 \cdot (3x-2)$



$x=0$ ve $x=1$ de 2 tane ekstremum noktası vardır.

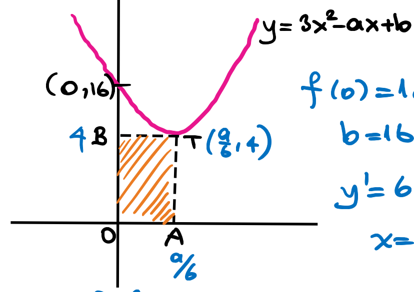
5.



Yukarıda tepe noktası T olan,

$y = 3x^2 - ax + b$

parabolünün yerel minimum değeri 4'tür.



$f(0) = 16$

$b = 16$ olur.

$y' = 6x - a = 0$ için

$x = \dfrac{a}{6}$ (T noktasının apsisi)

$f\left(\dfrac{a}{6}\right) = 4$ eşitliğinden

$3\dfrac{a^2}{36} - \dfrac{a^2}{6} + 16 = 4 \Rightarrow \dfrac{-a^2}{12} = -12 \Rightarrow \dfrac{a}{6} > 0$ olduğundan $a = 12$ olur.

$A(AOBT) = 4 \cdot 2 = 8$ olur.

6. $f(x) = x^2 - x - 6$

fonksiyonu veriliyor.

I. $f(x - 1)$

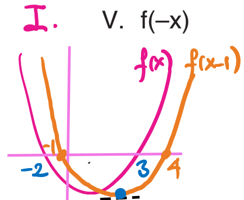
II. $2f(x)$

III. $|f(x)|$

IV. $f(2x)$

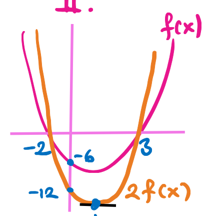
V. $f(-x)$

I.



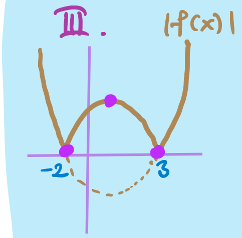
⇒ 1 tane ekstrem nokta.

II.



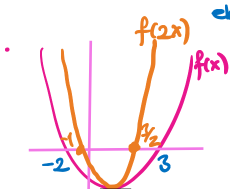
1 tane ekstrem nokta.

III.



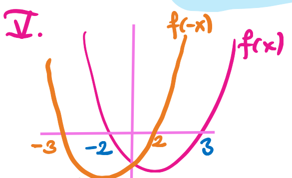
3 tane ekstrem nokta.

IV.



1 tane ekstrem nokta.

V.



1 tane ekstrem nokta.

7. ✗ I. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x$

✓ II. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - x^2$

✗ III. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3x - 1$

✗ I. $f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow$

x		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x=2$ de mutlak min var.

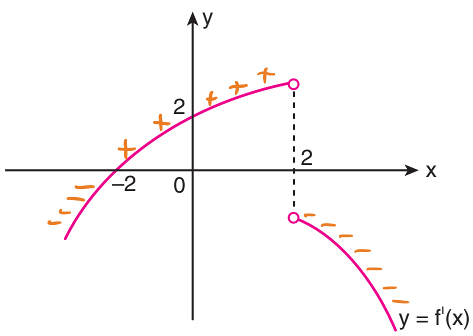
✓ II. $g'(x) = -2x \Rightarrow$

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x=0$ da mutlak max. var.

✗ III. $h'(x) = 3 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ için daima artan ekstremum nokta yoktur.

8. Aşağıda, reel sayılarda tanımlı ve sürekli bir f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



✓ I. f fonksiyonunun x = 2 noktasında yerel maksimumu vardır.

✓ II. f(3) > f(4)

✗ III. f fonksiyonu (–∞, 2) aralığında artandır.

Öncelikle $x=2$ noktasında $f'(x)$ tanımsız ama işaret değiştirmiştir. $f(x)$ sürekli olduğundan $x=2$ de sivri bir ekstremum nokta vardır.

x		-2		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

I. $x=2$ yerel max noktasıdır.

II. 3 ve 4 azalan aralığa girdiğinden $f(3) > f(4)$ tür.

III. öncülün yanlış olduğu tablodan görünüyor.

9. $f(x) = x^3 + 3x^2 + (m + 1)x + 3$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonunun ekstremum noktası yoksa $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ ifadesi için $\Delta \le 0$ koşulu sağlanmalı.

$f'(x) = 3x^2 + 6x + m + 1$

$\Delta = b^2 - 4ac \le 0$ $\quad 36 - 4.3.(m+1) \le 0$

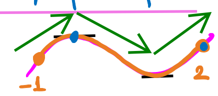
$m + 1 \ge 3 \Rightarrow m \ge 2$

m en az 2 olur.

10. $f(x) = x^3 - \dfrac{3x^2}{2} - 1$

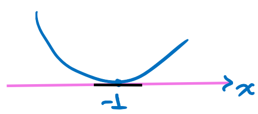
$f'(x) = 3x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x.(x-1)$

x		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					



$f(0) = -1$, $f(2) = 1$ } f(x) in en büyük değeri 1 dir.

11. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$



$x=-1$ de x eksenine teğet ise $f(-1)=0$, $f'(-1)=0$ } olmalı.

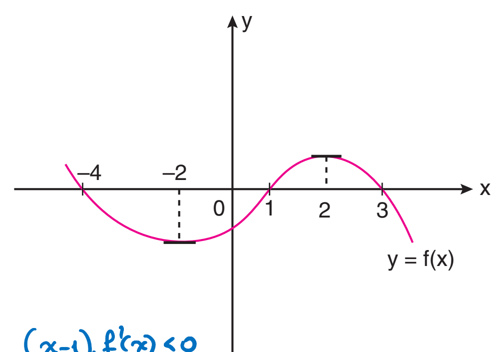
$f(-1) = -1 - a - b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + b \Rightarrow f'(-1) = 3 + 2a + b = 0$ $\quad 2a + b = -3$

$-1/\ a + b = 0$
$2a + b = -3$

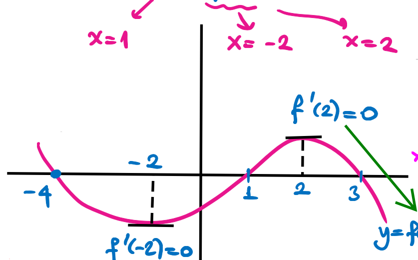
$a = -3$ ve $b = 3$ olur. $a \cdot b = -9$

12. Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



$(x-1).f'(x) < 0$

$x=1$ $\quad x=-2$ $\quad x=2$



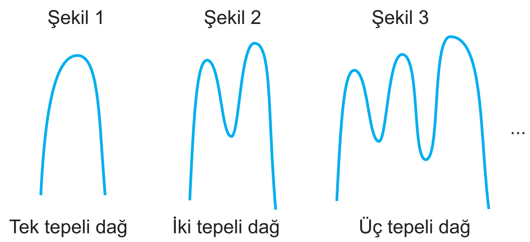
$x>2$ için $f(x)<0$ olduğundan $f'(x)$ in başkatsayısı negatif alınır.

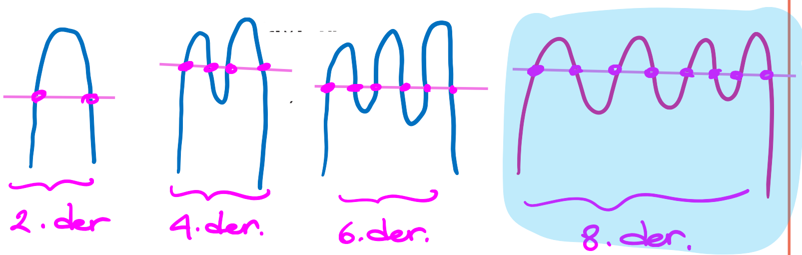
x		-2		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Çözüm Aralığı $(-2,1) \cup (2,\infty)$ Bu aralıktaki en küçük iki doğal sayı 0 ve 3 tür.

$0 + 3 = 3$

13. Aşağıda eğrilerin, dağ olarak adlandırılışı verilmiştir.





14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & , \quad x \le 5 \text{ ise} \\ 10 - x & , \quad x > 5 \text{ ise} \end{cases}$$

$x \le 5$ için $(x^2-4x)' = 2x-4 = 0$

$x=2$ de ekstrem nokta var.

$\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to5^-} f(x) = f(5)$ olduğundan $x=5$ te sürekli ve

$f'(5^+) = -1 < 0$, $f'(5^-) > 0$ olduğundan $x=5$ te türev işaret değiştirmiştir. Ekstrem noktadır.

$f(2)+f(5) = -4+5 = 1$

15. f(x) fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için süreklidir.

$x_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

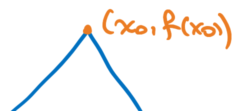
$f'(x_0^+) \cdot f'(x_0^-) < 0$

✓ I. x_0, f(x) fonksiyonunun bir ekstremum noktasının apsisidir.

✓ II. f(x) fonksiyonunun x_0 da limiti vardır.

✗ III. f(x) fonksiyonunun x_0 da türevi vardır.

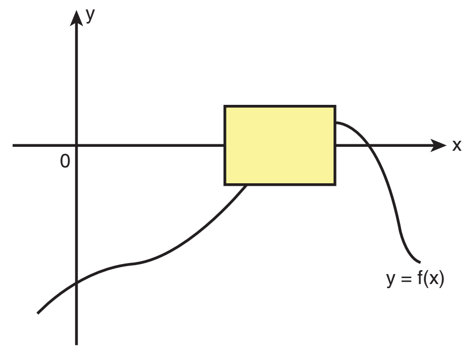
f(x), $x=x_0$ noktasında türevli olsaydı. $f'(x_0^+) = f'(x_0)$ (Aynı işaretli) olurdu. Türevsiz ama sürekli bir nokta sivri nokta adayıdır.



ekstrem noktadır.
Sürekli olduğundan limitlidir.

I ve II doğrudur. Bu noktada türev yoktur.

16. Bir matematik öğretmeni, önce öğrencilerin görmeyeceği şekilde gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı sürekli bir f fonksiyonunun grafiğini bir kâğıda çiziyor. Sonra grafiğin bir bölümünü şekildeki gibi sarı renkli bir kâğıt parçasıyla kapatıyor.

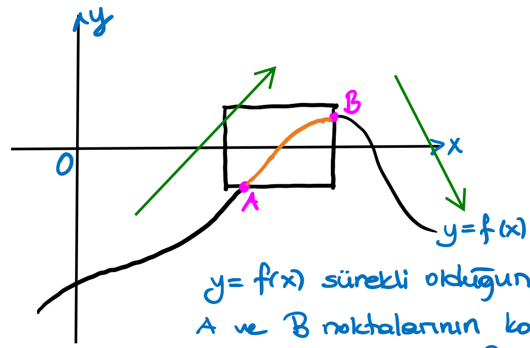


Daha sonra, öğrencilerden bazıları aşağıdaki yorumları yapıyor.

✓ I. Fonksiyonun en az bir ekstremum noktası vardır.

✓ II. Fonksiyonun grafiği x eksenini en az iki noktada keser.

✗ III. Fonksiyonun türevinin 0 olduğu en az bir nokta vardır.



y= f(x) sürekli olduğundan A ve B noktalarının kopmadan birleşmesi lazım. Bu x eksenini en az iki noktada keseceği anlamı taşır.

f(x) Artanlıktan azalanlığa sürekli bir şekilde geçtiğinden en az bir ekstrem nokta vardır.
Bu ekstrem nokta sivri nokta olabilir. dolayısıyla orada türev olmayabilir.

I ve II kesin doğru.

III yanlış olabilir.

1. a ve b birer reel sayıdır.

a + 2b = 12

$a+2b=12 \Rightarrow a=12-2b$

$a \cdot b = (12-2b) \cdot b \Rightarrow (12 \cdot b - 2b^2)' = 0$

$12-4b=0 \Rightarrow b=3$ alınır

$a=6$ olur.

$a \cdot b = 6 \cdot 3 = 18$ olur.

II. yol:

$\underbrace{a}_{6}+\underbrace{2b}_{6}=12$

$a=6 \quad b=3 \Rightarrow a \cdot b = 6 \cdot 3 = 18$ olur.

Birbirine yaklaştıkça çarpım en büyük değeri alır.

2. x, y ∈ ℝ olmak üzere,

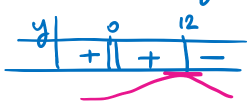
x + y = 16

$x+y=16 \Rightarrow x=16-y$.

$x \cdot y^3 = (16-y) \cdot y^3 = 16y^3 - y^4$

$(16y^3-y^4)' = 0 \Rightarrow 48y^2-4y^3=0$

$4y^2(12-y)=0$

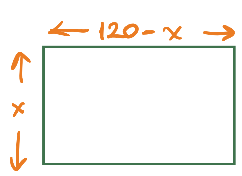


en büyük değer için $y=12$ alınmalı.

$x^1 \cdot y^3$ kuvvet oranlarının 1 : 3 olduğu değerlerinde 4 : 12 olması yani (x : y) aynı oranda olması tesadüf değildir.

3. Dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin yarısı duvar, diğer yarısı ise tel örgü ile çevrilmiştir.

Yarısı duvar yarısı tel örgü olduğundan,
Telin uzunluğu 120 m ise
Duvarın uzunluğuda 120 m olur.
Bahçenin çevresi 120+120 = 240 m olur.



$Alan(x) = x \cdot (120-x)$

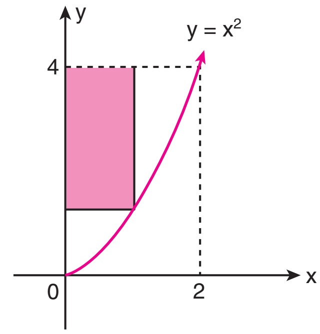
$A(x) = 120x - x^2$

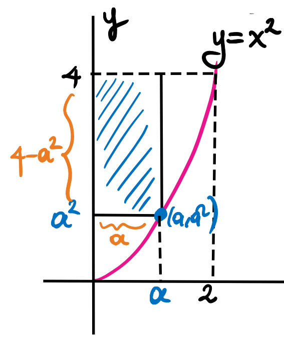
$A'(x) = 120 - 2x = 0 \Rightarrow x=60$ olur.

$A(60) = 60 \cdot 60 = 3600 \ m^2$ dur.

Çevresi sabit (belli) dan en büyük alanlı dikdörtgeni kare seçmiş olduk.

4.





Alanı veren ifade a ya bağlı olarak

$A(a) = a \cdot (4-a^2)$

$A(a) = 4a - a^3$

$A'(a) = 4 - 3a^2 = 0$

$\Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ dur.

$A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(4-\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$

5. a ∈ ℝ olmak üzere a ≠ 0,

$ax^2 + (a-1)x + 1 = 0$

$ax^2+bx+c=0$ denklemi için diskriminant $\Delta = b^2-4 \cdot a \cdot c$

a, ya bağlı Δ ifadesi,

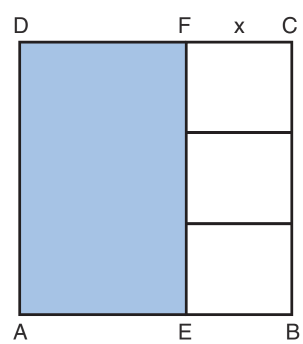
$\Delta(a) = (a-1)^2 - 4 \cdot a \cdot 1$

$\Delta'(a) = 2(a-1) \cdot 1 - 4 = 0 \Rightarrow 2a-6=0$

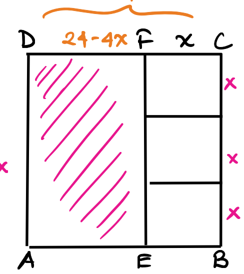
$a=3$ olur.

$\Delta(3) = 4 - 12 = -8$ olur.

6. Aşağıda verilen ABCD dikdörtgeni, AEFD dikdörtgeni ile 3 tane eş kareden oluşmaktadır.



Çevre(ABCD) = 48 cm $\Rightarrow 2(|AD|+|DC|)=48$ ($|AD| = 3x$)



$\Rightarrow |DC| = 24-3x$

x'e bağlı alan,

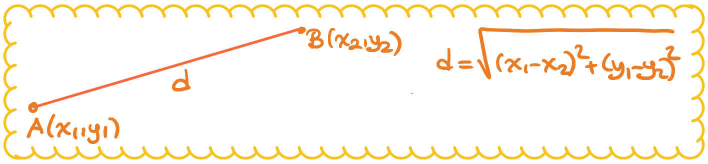
$A(x) = 3x(24-4x)$

$A(x) = 72x - 12x^2$

$A'(x) = 72 - 24x = 0$

$x=3$ olur.

7. Analitik düzlemde A(1, 1) ve B(a, a + 1) noktaları veriliyor.



a ya bağlı |AB| uzunluğu

$d(a)=\sqrt{(a-1)^2+(a+1-1)^2}=\sqrt{2a^2-2a+1}$

$d'(a)=\dfrac{4a-2}{2\sqrt{2a^2-2a+1}}=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

8. x TL ye alınan mal $x^2-5x+11$ TL ye satılıyor.

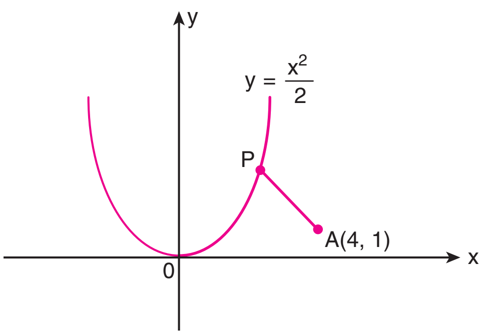
$\text{Kar} = \underbrace{\text{Satış Fiyatı}}_{x^2-5x+11} - \underbrace{\text{Alış Fiyatı}}_{x}$

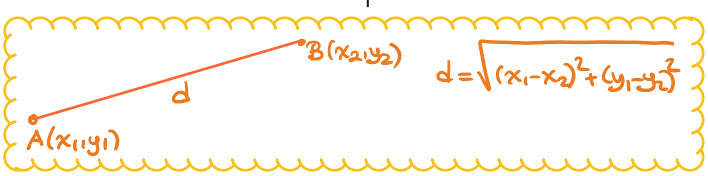
x 'e bağlı kar ifadesi

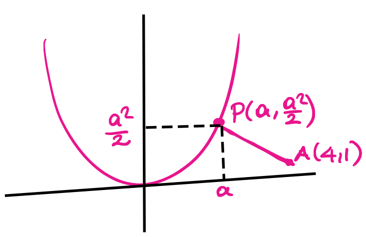
$K(x)=x^2-6x+11$

$K'(x)=2x-6=0 \Rightarrow x=3$ alınmalı

9.







a, ya bağlı |AP| uzunluğu

$d=\sqrt{(a-4)^2+(\frac{a^2}{2}-1)^2}$

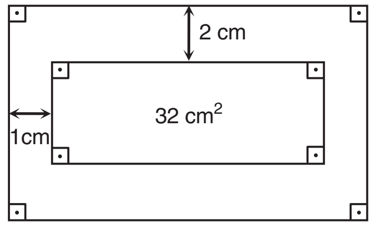
$d'=\dfrac{2(a-4)+2(\frac{a^2}{2}-1).a}{2\sqrt{(a-4)^2+(\frac{a^2}{2}-1)^2}}=0$

$2a-8+a^3-2a=0$

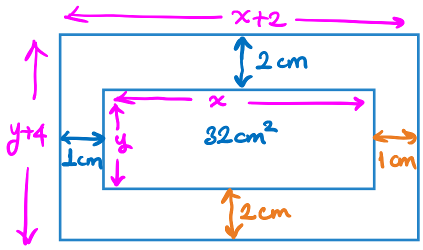
$a^3=8 \quad a=2$ olur.

$d(2)=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ olur.

10.



Dikdörtgen şeklindeki bir kağıdın 32 cm² lik kısmına yazı yazılacaktır.



$x.y=32 \Rightarrow y=\frac{32}{x}$

İstenilen alan

$(x+2).(y+4)$

Alanın x'e bağlı ifadesi

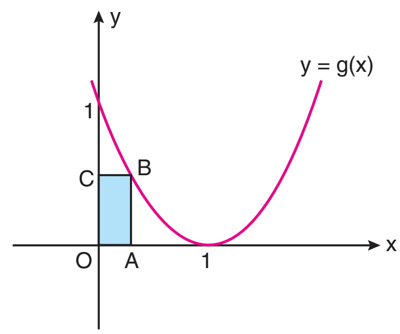
$A(x)=(x+2)(\frac{32}{x}+4)$

$=32+4x+\frac{64}{x}+8$

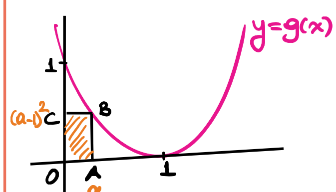
$A'(x)=4-\frac{64}{x^2}=0 \Rightarrow x=4$

x=4 için alan $A(4)=72$ cm²

11.



Yukarıda verilen parabol grafiğinde B noktası parabol ile OABC dikdörtgeninin ortak noktasıdır.



Parabolün denklemi $g(x)=(x-1)^2$ dır.

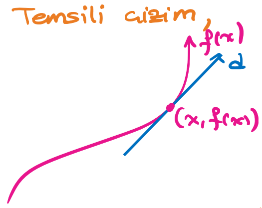
a ya bağlı çevre ifadesi

$Ç(a)=2(a+(a-1)^2) \Rightarrow Ç'(a)=2(1+2(a-1))=0$

$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$ olur. $Ç(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}$ olur.

12. $f(x)=x^3-6x^2+2x+1$

Temsili çizim



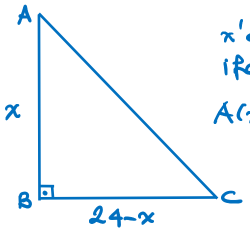
Herhangi bir (x, f(x)) noktasında eğimi veren fonksiyon,

$f'(x)=3x^2-12x+2$ dır.

en az değeri istenen ifadenin türevi alınır.

$f''(x)=6x-12=0 \Rightarrow x=2$ için $f'(2)=-10$

1.



x'e bağlı alanı veren ifade,

$A(x) = \frac{x\cdot(24-x)}{2} = \frac{24x - x^2}{2}$

$A'(x) = \frac{24-2x}{2} = 0 \Rightarrow x = 12$ olur.

$x = 12$ için alan

$A(12) = \frac{12\cdot 12}{2} = 72\ cm^2$ olur.

Üçgeni ikizkenar dik üçgen olarak almış olduk.

2. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

fonksiyonu veriliyor.

$y = f(x) + f'(x)$ fonksiyonunun grafiğinin üzerindeki herhangi bir nokta (a, b) dir.

$y = \underbrace{f(x)}_{x^2-4x+1} + \underbrace{f'(x)}_{2x-4} = x^2 - 2x - 3$

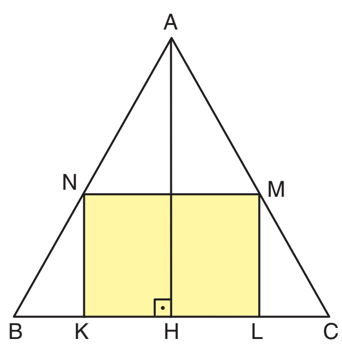
fonksiyonu üzerindeki herhangi (a,b) noktası $A(a, a^2-2a-3)$

Koordinatları toplamını veren ifade

$M(a) = a + a^2 - 2a - 3 = a^2 - a - 3$

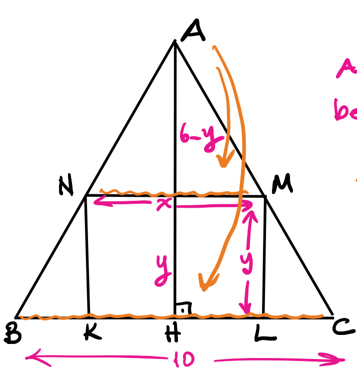
$M'(a) = 2a - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ olur. $M\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{13}{4}$ olur.

3.



ABC üçgeninin içine KLMN dikdörtgeni çizilmiştir.

$|AH| = 6$ br, $|BC| = 10$ br



$\overset{\triangle}{AMN}$ ve $\overset{\triangle}{ACB}$ üçgenlerinde benzerlik kullanılırsa.

$\frac{6-y}{6} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{30-5y}{3}$ olur.

KLMN dikdörtgeninin alanını veren ifade y değişkenine bağlı

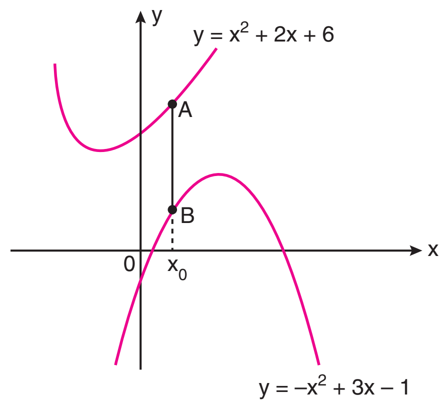
$A(y) = x\cdot y = \left(\frac{30-5y}{3}\right)\cdot y$

$A(y) = \frac{30y - 5y^2}{3} \Rightarrow A'(y) = \frac{30-10y}{3} = 0 \Rightarrow y = 3$

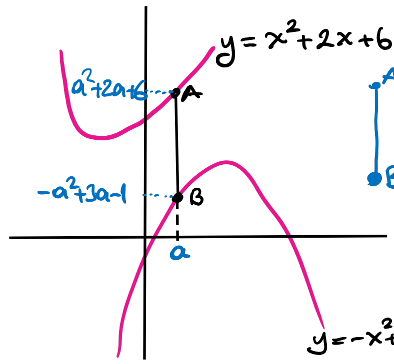
$A(3) = 15$ olur.

Dikdörtgenin alanının $\overset{\triangle}{ABC}$ nin yarısı olduğuna dikkat edelim.

4. Aşağıda, $y = x^2 + 2x + 6$ ve $y = -x^2 + 3x - 1$ fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.



A noktası $y = x^2 + 2x + 6$ ve B noktası $y = -x^2 + 3x - 1$ eğrileri üzerindedir.



A, B: $\underbrace{a^2+2a+6-(-a^2+3a-1)}_{2a^2-a+7}$

|AB| uzunluğunun a ya bağlı ifadesi

$d(a) = 2a^2 - a + 7$

$d'(a) = 4a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

5. İlk 50 yolcunun her biri için uçak bilet fiyatının 200 TL olduğu bir havayolu şirketinde 50 üzerine eklenen her yolcu için bilet fiyatı 2 TL düşmektedir.

Örneğin; uçağa 52 yolcu binerse her yolcu 196 TL bilet parası ödüyor.

$50 \cdot 200$

$(50+1)\cdot(200-2)$

$(50+2.1)\cdot(200-2.2)$

$\vdots$

$\underbrace{(50+x.1)}_{\text{Yolcu Sayısı}}\cdot\underbrace{(200-2.x)}_{\text{Uçak bilet fiyatı}} \Rightarrow$ Elde edilen kazanç

Kazancın x'e bağlı denklemi

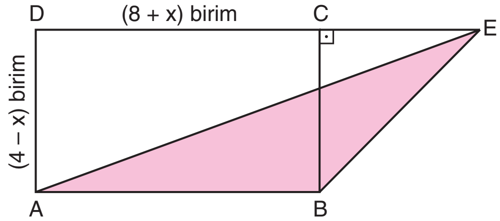
$K(x) = (50+x)(200-2x)$

$K'(x) = (200-2x) + (50+x)\cdot(-2) = 0$ $x = 25$ olur.

Yolcu sayısı: $(50+x)$ $(x=25)$

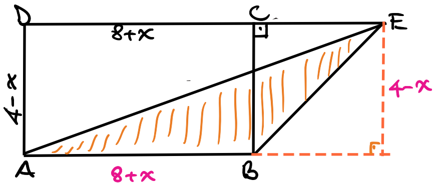
75 olur.

6.



ABCD dikdörtgen ve ABE bir üçgendir.

$|AD| = 4 - x, \ |DC| = 8 + x$

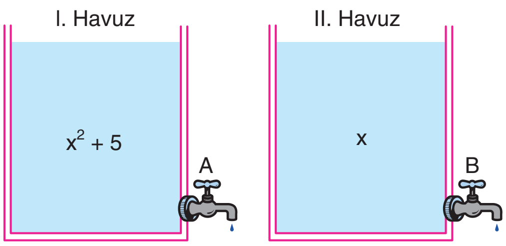


x'e bağlı alanı veren ifade

$A(x) = \frac{(8+x)(4-x)}{2} \Rightarrow A'(x) = \frac{4-x+(8+x).(-1)}{2} = 0$

$\Rightarrow x = -2$ olur. Alan $A(-2) = \frac{6.6}{2} = 18$ olur.

7.



I. havuz $x^2 + 5$ litre ve II. havuz x litredir. A musluğu I.havuzun tamamını 3 saatte B musluğu ise II. havuzun tamamını 2 saatte boşaltmaktadır.

$\frac{\text{1 saat sonra 1. havuzda kalan su}}{\text{1 saat sonra 2. havuzda kalan su}} = \frac{\frac{2}{3}(x^2+5)}{\frac{1}{2}.x}$

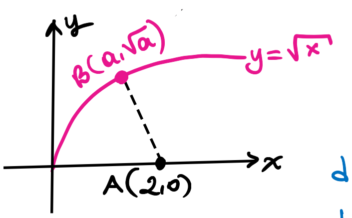
Oranın x'e bağlı ifadesi

$O(x) = \frac{4}{3}.\left(\frac{x^2+5}{x}\right) = \frac{4}{3}\left(x+\frac{5}{x}\right)$

$O'(x) = \frac{4}{3}\left(1-\frac{5}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ olur.

I. havuzdaki su miktarı $(\sqrt{5})^2 + 5 = 10$ litre olur.

8.



|AB| uzunluğunun a ya bağlı ifadesi

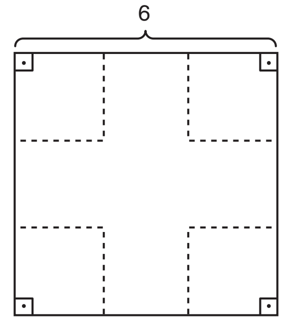
$d(a) = \sqrt{(a-2)^2 + (\sqrt{a}-0)^2}$

$d(a) = \sqrt{(a-2)^2 + a}$

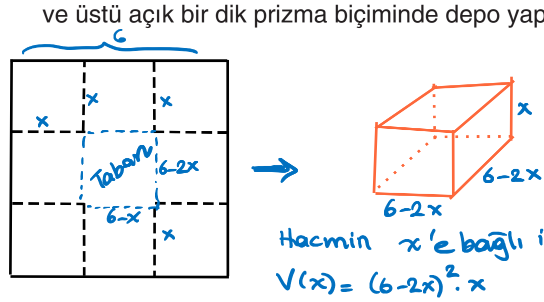
$\Rightarrow d'(a) = \frac{2(a-2)+1}{2\sqrt{(a-2)^2+a}} = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$ olur.

$a = \frac{3}{2}$ için $y\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ olur.

9.



Şekilde bir kenarı 6 br olan kare biçimindeki alüminyum levhanın köşelerinden eşit kare parçaları kesilerek katlanıyor ve üstü açık bir dik prizma biçiminde depo yapılıyor.



Hacmin x'e bağlı ifadesi

$V(x) = (6-2x)^2.x$

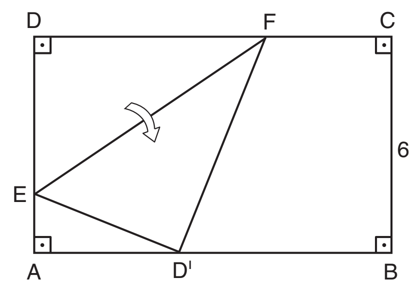
$\Rightarrow V'(x) = 2(6-2x).(-2).x + (6-2x)^2$

$V'(x) = (6-2x)(6-6x) = 0 \Rightarrow x=3, \ x=1$

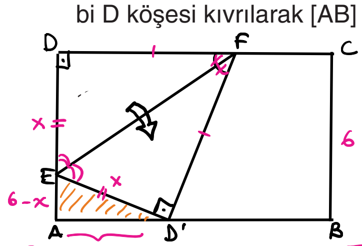
x=3 için taban kenarı 0 olur.

$x=1$ için hacim $V(1) = 16 \text{ br}^3$

10.



6 cm eninde dikdörtgen şeklindeki kağıt şerit, şekildeki gibi D köşesi kıvrılarak [AB] kenarı üzerine getiriliyor.



Pisagordan x'e bağlı $|AD'| = \sqrt{x^2-(6-x)^2} = \sqrt{12x-36}$

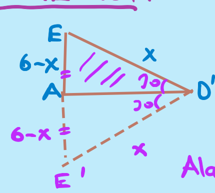
Alan(EAD') $A(x) = \frac{(6-x).\sqrt{12x-36}}{2}$

$A'(x) = \frac{-1\sqrt{12x-36} + (6-x).\frac{12}{2\sqrt{12x-36}}}{2} = \frac{36-12x+36-6x}{2\sqrt{12x-36}} = 0$

$\Rightarrow x = 4$ olur. $A(4) = 2\sqrt{3}$

Pratik Yol:

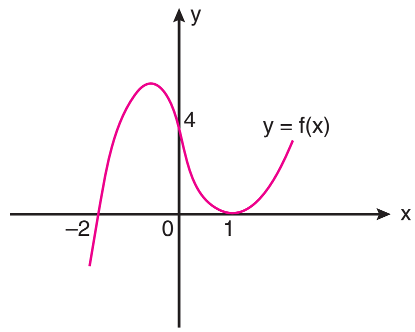
Çevre(EE'D') = 12



Alanının max olması için eşkenar üçgen alınmalı.

$\text{Alan} = \frac{4^2\sqrt{3}}{8} = 2\sqrt{3}$

1. Aşağıda 3. dereceden f(x) polinomunun grafiği verilmiştir.



$x=1$ noktasında teğet olduğundan çift katlı kök alınır.

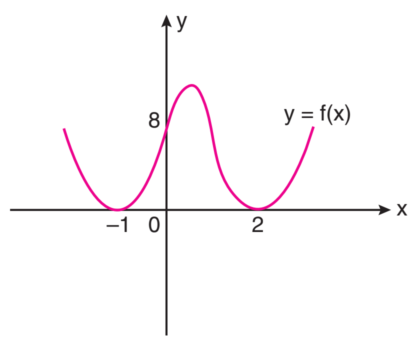
$f(x)=a(x+2)(x-1)^2$ $(0,4)$ noktasından geçtiğinden $f(0)=4$ olmalı.

$f(0)=a\cdot 2\cdot 1=4 \Rightarrow a=2$ dır.

$f(x)=2(x+2)(x-1)^2$ olur.

$f(2)=2\cdot 4\cdot 1=8$

2. Aşağıda 4. dereceden f(x) polinomunun grafiği verilmiştir.



$x=-1$ ve $x=2$ noktalarında teğet olduğundan çift katlı kök olarak alınır.

$f(x)=a(x+1)^2\cdot(x-2)^2$ $(0,8)$ noktasını sağlar.

$f(0)=8 \Rightarrow a\cdot 1\cdot 4=8 \Rightarrow a=2$ olur.

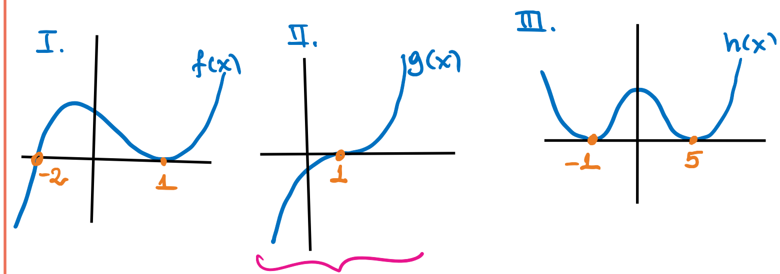
$f(x)=2(x+1)^2\cdot(x-2)^2$

$f(1)=2\cdot 4\cdot 1=8$ olur.

3. I. $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2)$

II. $g(x) = (x-1)^3$

III. $h(x) = (x+1)^2 \cdot (5-x)^2$



daima artan.

Yalnız II

4. I. $f(x) = x^2 \cdot (x-1)^2$

II. $g(x) = x^4 + x^2$

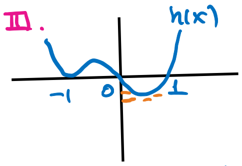
III. $h(x) = (x^2 - x)(x+1)^2$

I. $f(x)=x^2\cdot(x-1)^2$

x ekseninin altında kalan parçası yok.

II. Tüm x gerçek sayılar için $g(x)=x^2(x^2+1)\geq 0$ olduğundan x ekseninin altında kalan parçası yok.

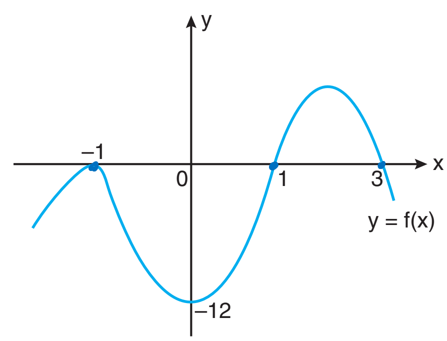
III.



x ekseninin altında kalan parçası var.

Cevap I ve II

5. Aşağıda, $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1) \cdot (ax+b)$ fonksiyonunun grafiği çizilmiştir.



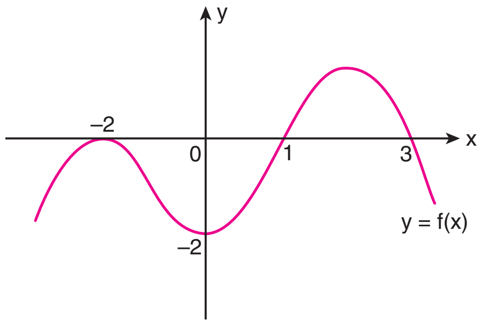
$ax+b$ çarpanını sıfırlayan değerin $x=3$ olması gerekir.

$3a+b=0$

$f(0)=-12 \Rightarrow -b=-12$
$\Rightarrow b=12$
$\Rightarrow a=-4$ olur.

$a-b=-4-12=-16$ olur.

6.



Şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$$f(x) = (x + a)^2 \cdot (x - 1) \cdot \left(bx + \frac{1}{2}\right)$$

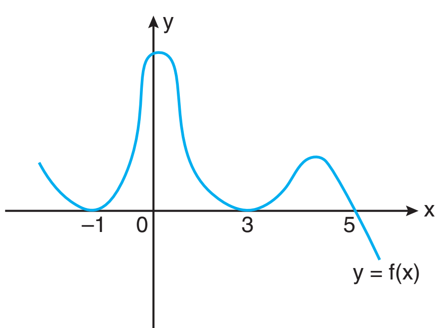
−2 noktasında teğet olduğundan $(x+2)^2$ olmalı $a=2$

$x=3$ ün çarpanın kökü olması gerekir.
$3b+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow b=-1/6$

$a.b = 2.\left(-\frac{1}{6}\right) = -1/3$

7. $f(x) = -x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + e$

fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.

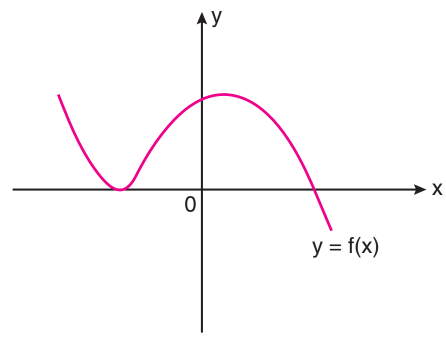


$f(x) = -x^5+bx^4+cx^3+dx^2+e$
Baskatsayı −1

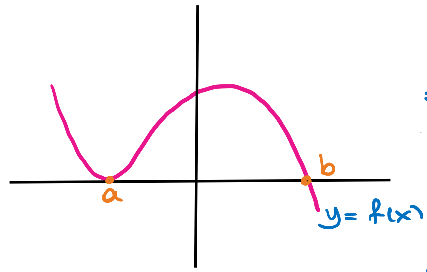
$-x^5+bx^4+cx^3+dx^2+e = -(x+1)^2(x-3)^2.(x-5)$

eşitliğinde $x=0$ için
$e=-1.9.(-5) \Rightarrow e=45$ olur.

8. Aşağıda, f(x) polinom fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



I. f(x) in derecesi tektir.
II. f(x) = 0 denkleminin çözüm kümesi iki elemanlıdır.
III. f(x) in tüm sıfırlarının çarpımı pozitif bir sayıdır.



m ve n sayma sayıları olmak üzere

$f(x)=-(x-a)^{2m}(x-b)^{2n-1}$ şeklinde olmalı.

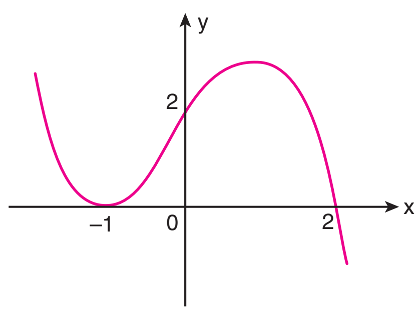
temsilen $m=n=1$ alalım.
$f(x)=(x-a)^2.(x-b)$ olur.
3.derece olur.

I. f(x), 3.derece olur Tektir.

II. $Ç.K=\{a,b\}$ 2 elemanlıdır.

III. a da çift katlı sıfırları $a.a.b = a^2.b > 0$ olur.

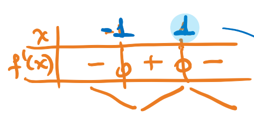
9.



$f(x) = a(x+1)^2.(x-2)$ $f(0)=2$ olmalı $-2a=2$ $a=-1$

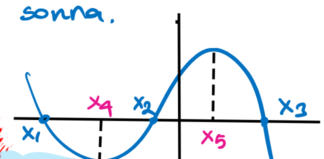
$f(x)=(x+1)^2(-x+2) \Rightarrow f'(x)=2(x+1)(-x+2)+(x+1)^2.(-1)$

$f'(x)=(x+1)(-3x+3)=0 \Rightarrow x=1$
$x=-1$



Yerel Max değeri $f(1)=4$ dur.

II.yol: $f(x)=(x+1)^2.(-x+2)$ fonksiyonundan sonra,



3. derece fonksiyonlar için

$\frac{x_1+x_2+x_3}{3} = \frac{x_4+x_5}{2}$ kuralıyla

$\frac{-1-1+2}{3} = \frac{-1+m}{2} \Rightarrow m=1$ yerel max noktanın apsisi

$f(1)=4$ bulunur.

ACİL MATEMATİK

1. $f(2x+1) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

$\lim\limits_{x\to3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = -\lim\limits_{x\to3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = -f'(3)$

$f(2x+1) = (x^2+1)^{-2} \Rightarrow f'(2x+1).2 = -2.(x^2+1)^{-3}.2x$

$x=1$ için $2f'(3) = \dfrac{-4}{8}$

$\Rightarrow f'(3) = -\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow -f'(3) = \dfrac{1}{4}$ //

2. a ve b birer reel sayıdır.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x > 1 \\ ax + b, & x \le 1 \end{cases}$$

$x=1$ noktasında sürekli olduğundan

$\underbrace{\lim\limits_{x\to1^+} f(x)}_{1+a} = \underbrace{\lim\limits_{x\to1^-} f(x)}_{a+b} = f(1)$

$1+a = a+b \Rightarrow b=1$ olur.

$x=1$ de türevsiz olduğundan

$\underbrace{f'(1^+)}_{2} \neq \underbrace{f'(1^-)}_{a}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 2x, & x>1 \\ a, & x<1 \end{cases}$

$2 \neq a$

$a \neq 2$ ve $b=1$ ise $a+b \neq 3$ tür.

3.

f(x) çift olduğundan

$f(-x) = f(x)$ her iki tarafın türevini alalım.

$-f'(-x) = f'(x)$

$f'(-x) = -f'(x)$ olur. $f'(x)$ fonksiyonu tek olur.

şıklarda tek olan fonksiyonumuz.

D) $x^3 - 2x$

4. f bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(2x-1) = (x-1)\, f(x) + x$$

eşitliği veriliyor.

$x=1$ noktasında çizilen teğetin eğimi $f'(1)$

Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.

$f'(2x-1).2 = f(x) + (x-1).f'(x) + 1$

$x=1$ için, $2f'(1) = f(1) + 1$

$f(2x-1) = (x-1).f(x) + x$ eşitliğinde $x=1$ için $f(1)=1$ olur.

$2f'(1) = 1+1 \Rightarrow f'(1) = 1$

5. f(x) ve g(x) sürekli ve türevlenebilir birer fonksiyon,

$$g'(1) = g(1) = 1 \text{ ve } f(x) = g^2(x)$$

$y = (f \circ f)(x)$ fonksiyonuna $x=1$ noktasında çizilen teğetin eğimi $f'(f(1)).f'(1)$ dır.

$f(x) = g^2(x) \Rightarrow f(1) = g^2(1) = 1^2 = 1$

$f'(x) = 2g(x).g'(x) \Rightarrow f'(1) = 2\underbrace{g(1)}_{1}.\underbrace{g'(1)}_{1} = 2$

$\underbrace{f'(\underbrace{f(1)}_{1})}_{2}.\underbrace{f'(1)}_{2} = 4$ olur.

6. $\forall x \in \mathbb{R}$ için,

$$f'(x) > 0 \text{ ve } g'(x) < 0$$

I. $f(g(x)) > f(g(x+1))$

II. $f(g(x)) > f(g(x-1))$

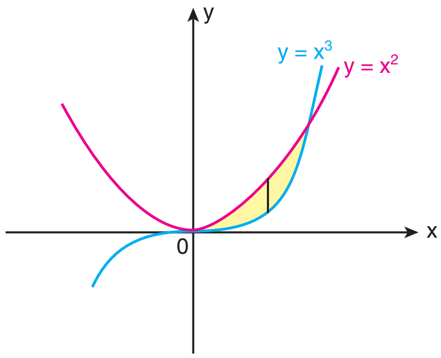
III. $g(f(x)) > g(f(x+1))$

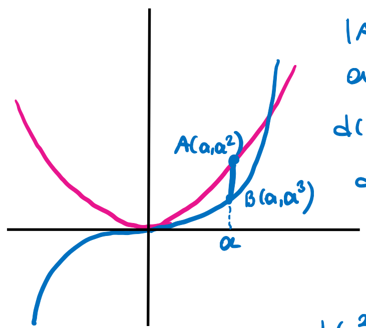
I. $f(g(x)) > f(g(x+1)) \xrightarrow{f \text{ ARTAN}} g(x) > g(x+1) \xrightarrow{g \text{ AZALAN}} x < x+1$ ✓

II. $f(g(x)) > f(g(x-1)) \xrightarrow{f \text{ ARTAN}} g(x) > g(x-1) \xrightarrow{g \text{ AZALAN}} x < x-1$ ✗

III. $g(f(x)) > g(f(x+1)) \xrightarrow{f \text{ ARTAN}} f(x) < f(x+1) \xrightarrow{g \text{ AZALAN}} x < x+1$ ✓

7. Aşağıda iki eğri verilmiştir.





|AB| uzunluğunun a cinsinden eşiti

$d(a) = a^2 - a^3$

$d'(a) = 2a - 3a^2$

$= a(2-3a) = 0$

$a = \frac{2}{3}$

$d\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$ //

8. x > 0 olmak üzere, bir kütüphanede ders çalışan öğrenci sayısı,

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 99$

fonksiyonuyla ifade edilmektedir. x, kütüphanede ders çalışılan toplam saat sayısıdır.

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x^2 - 6x + 5)$

$= 3(x-5)(x-1)$

x		1		5	
$f'(x)$	+	0	−	0	+

Minimum değer için $x = 5$ olmalı.

x: kütüphanede ders çalışılan toplam saat sayısı

9. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$f(x) = \sin\alpha \cdot x^2 - \cos\alpha \cdot x + 1$

$f'(x) = 2\sin\alpha . x - \cos\alpha$

$2\sin\alpha . x - \cos\alpha = 0 \Rightarrow x = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$

$\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\cos\alpha}{\cancel{2}\sin\alpha}$

$1 = \cot\alpha$

$\Rightarrow \alpha = 45°$

10. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$

$x = 2, \quad x = -1$

x		−1		2	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗
	ARTAN		AZALAN		ARTAN

$(-1, \underbrace{f(-1)}_{8})$ yerel max değ.

$(2, \underbrace{f(2)}_{-19})$ yerel min değ.

✗ A) Yerel min değeri −19 olduğundan yanlış.

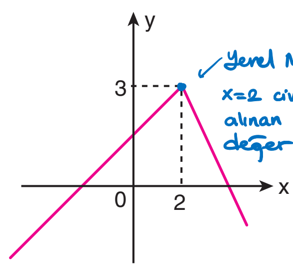
✗ B) x>2 için fonksiyon artan (tablodan) olduğundan yanlış.

✗ C) Yerel minimum nokta (2,−19) olduğundan yanlış.

✗ D) fonksiyon $(-\infty,-1]$, $[2,\infty)$ aralıklarında artan olduğundan yanlış.

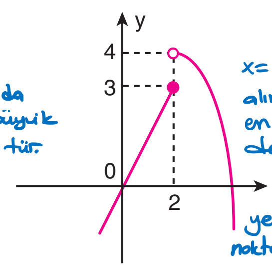
E) Tablodan görüldüğü üzere yerel maksimum değeri 8 dir.

11. I.



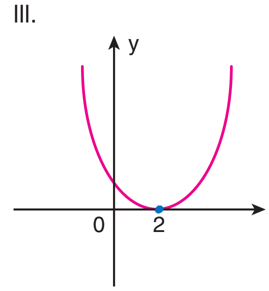
✓ Yerel Max
x=2 civarında alınan en büyük değer 3 tür.

II.



x=2 civarında alınan bir en büyük değer yok dolayısıyla yerel maksimum nokta değildir.

III.

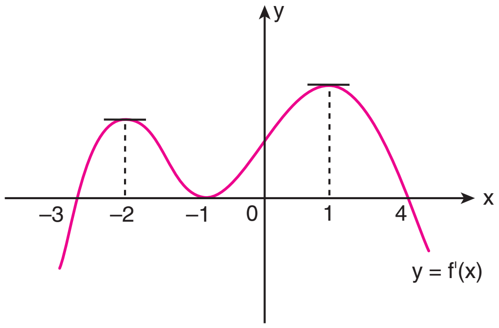


x=2 civarında alınan en küçük değer 0 dır.

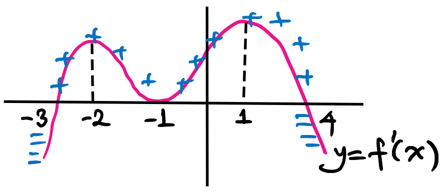
Yerel Minimum noktadır.

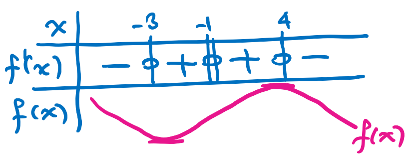
Cevap Yalnız I

12.



Şekilde, y = f'(x) türev fonksiyonun grafiği verilmiştir.



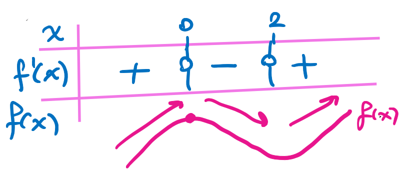


x = -3 te yerel min

x = 4 te yerel max

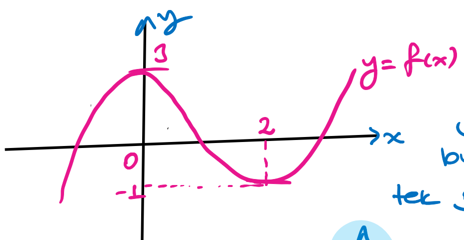
13. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, \; x = 2$



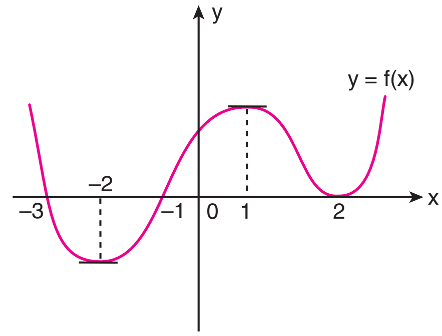
f(0)=3 yerel Max

f(2)=−1 yerel Min.

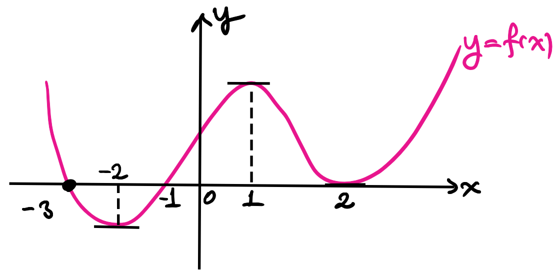


şeklinde bir grafik olmalı bu koşulu sağlayan tek grafik A seçeneğindedir.

14.



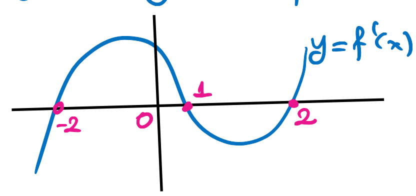
Şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



x=−2, x=1 ve x=2 noktaları ekstremum noktalarıdır. f(x) bu noktalarda türevlenebilir olduğundan bu noktalarda türev değeri 0 dır. f'(x) fonksiyonu bu noktalarda x eksenini keser.

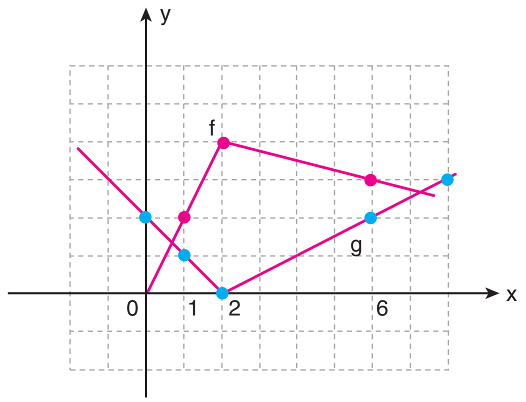
x≥2 için f(x) artan olduğundan f'(x) pozitif değerler alır.

Bu bilgilere göre f'(x) fonksiyonu

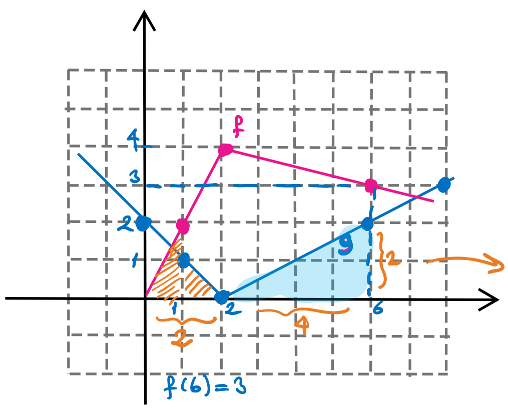


biçiminde olabilir. Koşullara uygun şık B seçeneğidir.

1.



Yukarıda, birim kareli zeminde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



$\dfrac{f(6).g'(6)}{f'(1)+g'(1)}$

$g'(6)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$g'(6)$ x=6 noktasında g(x) in eğimi $\frac{1}{2}$

$g'(1)$ x=1 noktasında g(x) in eğimi -1

$f'(1)$ x=1 noktasında f(x) in eğimi 2

$\dfrac{f(6).g'(6)}{f'(1)+g'(1)}=\dfrac{3.\frac{1}{2}}{2+(-1)}=\dfrac{3}{2}$

2. $f(x)=\begin{cases} x^2-2x, & x<1 \\ x^3-1, & x\geq 1 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor.

g(x) = (f o f)(x)

$f'(x)=\begin{cases} (x^2-2x)', & x<1 \\ (x^3-1)', & x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x-2, & x<1 \\ 3x^2, & x>1 \end{cases}$

$g(x)=(f\circ f)(x) \Rightarrow g'(x)=f'(f(x)).f'(x)$

$x=-1$ için $g'(-1)=f'(\underbrace{f(-1)}_{3}).\underbrace{f'(-1)}_{-4}=\underbrace{f'(3)}_{27}.(-4)$

$=-108$

3. $2f(x)+f(-x)=x^2-x+1$

eşitliği veriliyor.

f(x) fonksiyonuna x=1 noktasında çizilen teğetin eğimi f'(1) isteniyor.

$2f(x)+f(-x)=x^2-x+1$ (Her iki tarafın türevini alalım)

$2f'(x)-f'(-x)=2x-1$

$x=1$ ve $x=-1$ için

$2/\ 2f'(1)-f'(-1)=1$

$+\ \ 2f'(-1)-f'(1)=-3$

$3f'(1)=-1 \Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{3}$

4. $f(x)=-x^3+3x^2+45x-2$

eğrisi üzerinde bulunan apsisi tam sayı olan noktalarındaki teğetleri çiziliyor.

teğetler x ekseni ile dar açı yapıyorsa $f'(x)>0$ olur.

$f'(x)>0$ koşulunu sağlayan x tamsayılarını bulalım.

$f'(x)=-3x^2+6x+45=-3(x^2-2x-15)$

$\Rightarrow f'(x)=-3(x-5)(x+3)=0$ için $x=5$ ve $x=-3$

x		-3		5	
f'(x)	−	0	+	0	−

(-3,5) aralığındaki tamsayılar

-2,-1,0,1,2,3,4

7 farklı nokta dur.

5. $y=\dfrac{2x^3}{3}-6x^2+x+1$

$y'=2x^2-12x+1$ fonksiyonunun en küçük değeri için türev alınırsa

$y''=4x-12=0 \Rightarrow x=3$

x		3	
y''	−	0	+
y'			

$x=3$ için $y(3)=\dfrac{2.27}{3}-6.9+3+1$

$y(3)=18-54+4=-32$

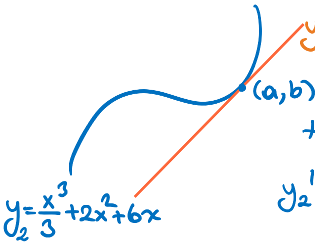
(3,-32)

6. k bir gerçek sayıdır.

$y = 2x + k$ doğrusu,

$$y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x$$

Temsili çizim !



, y_1 doğrusunun eğimi 2

$x = a$ noktasında y_2 eğrisinin teğetinin eğimi 2

$y_2' = x^2 + 4x + 6 \Rightarrow y_2'(a) = a^2 + 4a + 6 = 2$

$\Rightarrow a^2 + 4a + 4 = 0$

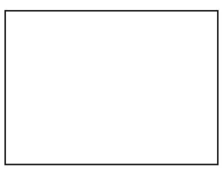
$\Rightarrow (a+2)^2 = 0 \Rightarrow a = -2$ olur.

$a = -2$ için

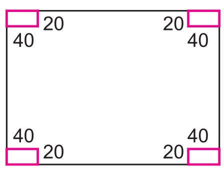
$y_1(-2) = y_2(-2) \Rightarrow -4 + k = -\frac{8}{3} + 8 - 12$

$k = -8/3$ olur.

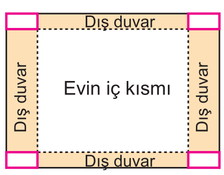
7. Aşağıda bir evin projesiyle ilgili bilgiler verilmiştir.



Evin temeli: dikdörtgen

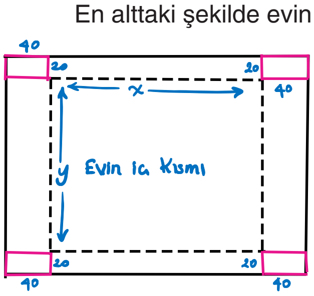


Her köşeden, taban boyutları 20 cm ve 40 cm olan dikdörtgen prizma biçiminde bir sütun yükselecektir.



Sütunların araları dış duvarlar olacaktır. Dış duvarların arası evin iç kısmı olacaktır.

En alttaki şekilde evin iç kısmının alanı 50 m² dir.



$x \cdot y = 50$ (Evin iç kısmının Alanı)

$\Rightarrow y = \frac{50}{x}$

40 cm = 0,4 m
80 cm = 0,8 m

$(y + 0{,}4)(x + 0{,}8)$ (Evin Temelinin Alanı)

Evin temelinin alanının x'e bağlı ifadesi

$A(x) = \left(\frac{50}{x} + 0{,}4\right)(x + 0{,}8)$

$\Rightarrow A(x) = 50 + \frac{40}{x} + 0{,}4 \cdot x + 0{,}32$

$\Rightarrow A'(x) = -\frac{40}{x^2} + 0{,}4 = 0$ için $x = 10$ olur.

$\Rightarrow A(10) = 50 + 4 + 4 + 0{,}32 \Rightarrow A(10) = 58{,}32$ olur.

8. Bir dondurmacı tanesi 50 kuruşa günde 200 dondurma satmaktadır. Dondurmacı her 1 kuruşluk zam için günde iki dondurma daha az satmaktadır. Dondurmacının günlük masrafı dondurma başına sabit olup 40 kuruştur.

200 dondurma satışında 1 dondurmadan elde edilen kar $50 - 40 = 10$ Kr

200 dondurma $\times$ 10 Kr

$(200-2)$ dondurma $\times$ $(10+1)$ Kr

$(200-2.2)$ dondurma $\times$ $(10+2.1)$ Kr

⋮

$\underbrace{(200-2x)}_{\text{Dondurma Sayısı}}$ dondurma $\times$ $\underbrace{(10+x.1)}_{\text{1 dondurmadan elde edilen kar}}$ Kr (Elde edilen Kar)

Toplam Karın x'e bağlı ifadesi

$K(x) = (200-2x).(10+x)$

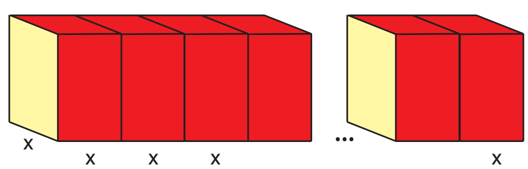
$K'(x) = -2(10+x) + (200-2x).1 = 0$

$\Rightarrow x = 45$ olur.

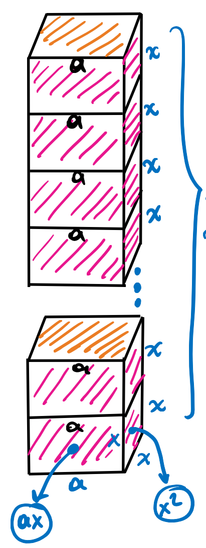
Dondurma Sayısı $200 - 2x$

$x = 45$ için $200 - 90 = 110$ olur.

9.



Yukarıdaki şekilde bir ayrıtı x br ve hacimleri toplamı 1875 br³ olan x tane kare prizma yan yana dizilerek yukarıdaki yapı oluşturulmuştur. Oluşan yapıda her bir prizmanın ikişer yüzü kırmızıya boyanmıştır.



Her bir prizmanın hacmi $\underbrace{x.x.a}$

x tane olduğundan toplam hacim

$V = x.(x^2.a) = x^3.a = 1875$

$\Rightarrow a = \frac{1875}{x^3}$

Bir prizma için kırmızı yüzeylerin alanları toplamı $a.x + x^2$

x tane için $x(ax + x^2)$

$a = \frac{1875}{x^3}$ için

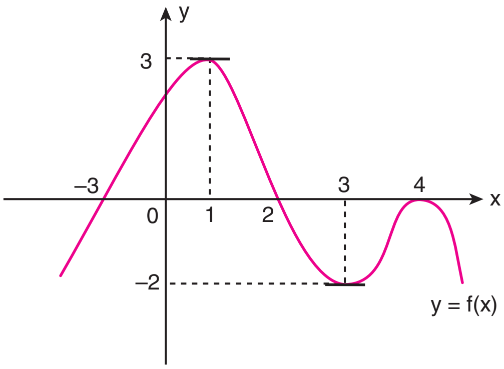
Alanlar toplamının x cinsinden eşiti

$A(x) = x.\left(\frac{1875}{x^3}.x + x^2\right) = \frac{1875}{x} + x^3$

$A'(x) = -\frac{1875}{x^2} + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^4 = 625$

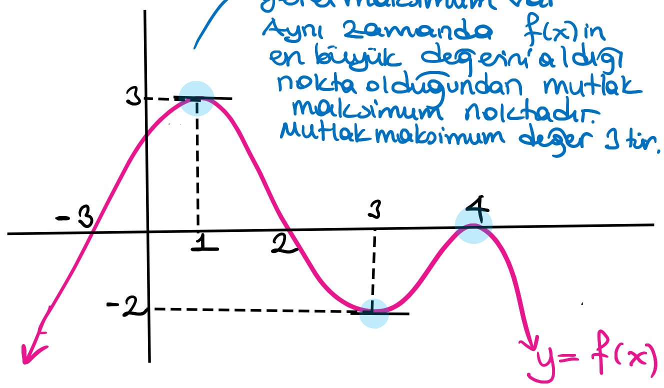
$\Rightarrow x = 5$ için $A(5) = 500$ olur.

10.



Şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

x=1 noktasında yerel maksimum var. Aynı zamanda f(x)in en büyük değerini aldığı nokta olduğundan mutlak maksimum noktadır. Mutlak maksimum değer 3 tür.



* f(x)in görüntü kümesi $(-\infty,3]$ olduğundan mutlak minimum noktası yoktur.

* $x=4$ noktasında yerel maksimumu vardır.

* $x=-2$ de f(x) artan $f'(-2)>0$
$x=\frac{1}{2}$ de f(x) azalan $f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$ olduğundan $f'(-2).f'\left(\frac{1}{2}\right)<0$ olur.

Bu bilgilere göre cevap B dır.

11. $f(x) = 12x - x^3$

$f'(x)=12-3x^2$

$f'(x)=3(2-x)(2+x)=0 \Rightarrow x=2 \vee x=-2$

x		-2		-1	2		3
f'(x)	−	0	+		0	−	
f(x)	↘		↗			↘	

[-1,3] aralığındaki parçası

$x=2$ için $f(2)=16$ olur.

12. $f(x) = \frac{x^2}{3} - x - 8$ parabolünün üzerindeki her noktanın, koordinatlar çarpımının değerini veren fonksiyon g olsun.

I. g fonksiyonu [–2, 4] aralığında azalandır.

II. g fonksiyonunun 2 tane ekstremumu vardır.

III. g fonksiyonunun yerel maksimum değeri 10 dur.

f(x) parabolü üzerindeki herhangi bir $(x,f(x))$ olmak üzere koordinatları çarpımı

$g(x)=x.\underbrace{f(x)}_{\left(\frac{x^2}{3}-x-8\right)}$ olur. $g(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-8x$

$\Rightarrow g'(x)=x^2-2x-8=(x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x=4 \vee x=-2$

x		-2		4	
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗		↘		↗

* $x=-2$ ve $x=4$ te ekstremum nokta duzur.

* [-2,4] aralığında azalan

* Yerel Maksimum değeri $x=-2$ için

$g(-2)=\frac{-8}{3}-4+16=\frac{28}{3}$ dur.

Bu bilgilere göre cevap I ve II dir.

13. y = f(x) fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) > 0$ olmaktadır.

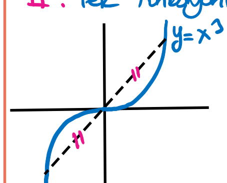
I. f(x) fonksiyonu periyodiktir.

II. f(x) tek fonksiyondur.

III. f(x) çift fonksiyondur.

I. $f:\mathbb{R}\rightarrow A$ bir fonksiyon $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f(x+T)=f(x)$ koşulunu sağlayan T gerçek sayısı varsa f(x) periyodik fonksiyondur.
T için herhangi bir değer seçelim T=3 olsun.
$f(x)=f(x+3)$ ise ... $=f(1)=f(4)=f(7)=...$
$...=f(2)=f(5)=f(8)=...$
$...=f(3)=f(6)=f(9)=...$ eşitlikleri sağlanır.
$\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)>0$ f(x) artan.
$1<5$ için $f(1)<f(5)$ olmalı $f(1)=f(4)$ olduğundan artanlık koşulu bozulur. Kesin Yanlıştır.

II. Tek fonksiyonlar orjine göre simetriktir.



biçiminde orjine göre simetrik artan fonksiyon seçilebilir. Kesin Yanlış diyemeyiz.

III. $f:A\rightarrow B$, $\forall x\in A$ için $f(-x)=f(x)$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar çift fonksiyondur.
f artan olduğundan $-2<2$ iken $f(-2)<f(2)$ olmalıdır. Çift fonksiyonlar için $f(-2)=f(2)$ olduğundan çelişkidir. Kesin Yanlıştır.

14. $f(x) = x^4 - x^2 + 2$

$f'(x) = 4x^3 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x(2x^2 - 1) = 0$

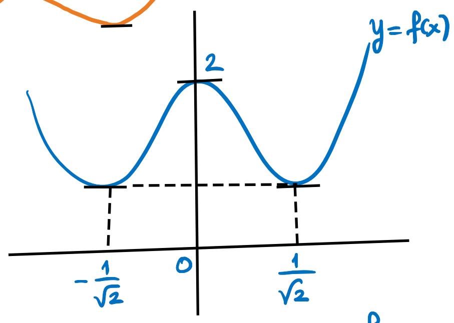
için $x = 0$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ olur.

x		$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$							

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{4}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{7}{4}$

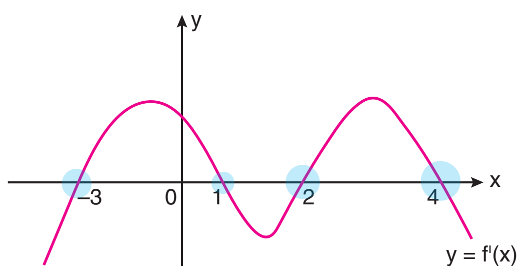
$f(0) = 2$



biçiminde bir grafik olmalı.

Cevap C dır.

15. Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun birinci türevinin grafiği verilmiştir.



$f'(-3) = 0$
$f'(1) = 0$
$f'(2) = 0$
$f'(4) = 0$

$f(-2x)$ için türev alınırsa

$-2 \cdot f'(-2x) = 0$

$-2x = -3 \rightarrow x = 3/2$

$-2x = 1 \rightarrow x = -1/2$

$-2x = 2 \rightarrow x = -1$

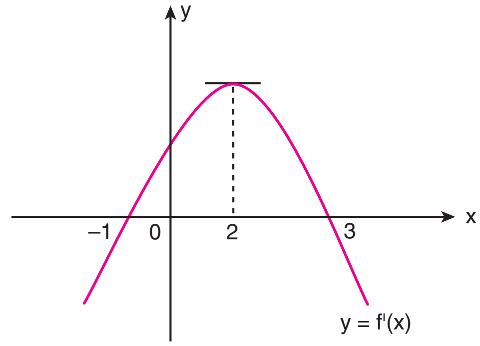
$-2x = 4 \rightarrow x = -2$

x		-2		-1		$-1/2$		$3/2$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$
$f(x)$									

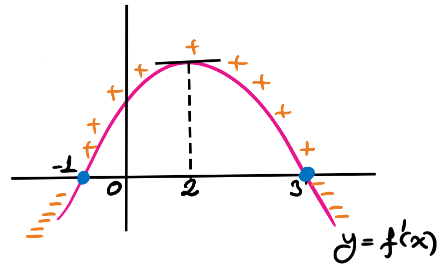
$x = -2$ ve $x = -\frac{1}{2}$ de yerel maksimum nokta vardır.

$(-2)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ olur.

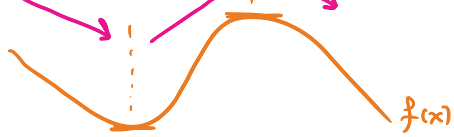
16.



Şekilde, f'(x) (türev fonksiyonunun grafiği) verilmiştir.



x		-1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘



Biçiminde bir grafik olmalı.

$x = -1$ ve $x = 3$ de ekstremum noktalar var.

Koşullara uygun D seçeneğidir.

1. D	2. E	3. E	4. C	5. B	6. D	7. C	8. E
9. E	10. B	11. C	12. D	13. D	14. C	15. C	16. D

1. $f(x) = |x^2 + (a-1)x + 4|$

fonksiyonu her $x \in R$ için türevlidir.

$a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = |ax^2+bx+c|$ fonksiyonunun her $x \in \mathbb{R}$ için türevli olması için $ax^2+bx+c=0$ denkleminin $\Delta = B^2-4 \cdot A \cdot C \leq 0$ koşulunu sağlaması gerekir.

$f(x) = |x^2+(a-1)x+4|$ $\quad \Delta \leq 0$ için

$(a-1)^2 - 4 \cdot 4 \leq 0 \Rightarrow (a-1)^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq a-1 \leq 4$

$\Rightarrow -3 \leq a \leq 5$

a nın alacağı tamsayı değerleri toplamı

$-3-2-1+0+1+2+3+4+5 = 9$ olur.

2. $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - ax + b$ veriliyor.

$$g(x) = \begin{cases} f'(x), & x > 0 \\ f(x), & x \leq 0 \end{cases}$$

olmak üzere, g(x) fonksiyonu $\forall x \in \mathbb{R}$ için süreklidir.

$f(x) = x^2-ax+b$ ve $f'(x) = 2x-a$ olduğundan

$$g(x) = \begin{cases} 2x-a, & x>0 \\ x^2-ax+b, & x \leq 0 \end{cases} \text{ olur.}$$

$g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ için sürekli ise $x=0$ da süreklidir.

$$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} (2x-a)}_{-a} = \underbrace{\lim_{x \to 0^-} (x^2-ax+b)}_{b} = g(0)$$

$\Rightarrow a+b=0$ olur.

$f(-1) = 1 + \underbrace{a+b}_{0} \Rightarrow f(-1) = 1$ olur.

3. Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu her x için,

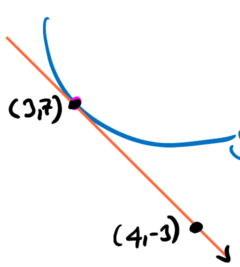
$-6 \leq f(x) \leq -1$

eşitsizliklerini sağlıyor.

her x için $-6 \leq f(x) \leq -1$ ise $|f(x)| = -f(x)$

$\underbrace{|f(x)|}_{-f(x)} - f(x)$ fonksiyonu $-2f(x)$ olur.

TEMSİLİ ÇİZİM:



$y = -2f(x)$ fonksiyonuna $x=3$ noktasında çizilen teğetin eğimi

$\Rightarrow -2f'(3) = \underbrace{\dfrac{7-(-3)}{3-4}}$

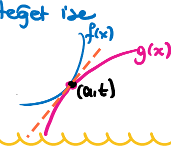
iki noktası bilinen doğrunun eğimi

$\Rightarrow -2f'(3) = -10$

$\Rightarrow f'(3) = 5$ olur.

4. $f(x) = x^2 + bx + 10$ fonksiyonu veriliyor.

f(x) ve g(x) fonksiyonları x=a noktasında birbirine teğet ise



$f(a) = g(a)$
$f'(a) = g'(a)$
koşulları sağlanmalıdır.

f(x) ve f'(x) fonksiyonları için

$f(a) = f'(a)$
$f'(a) = f''(a)$
koşullarını sağlatalım.

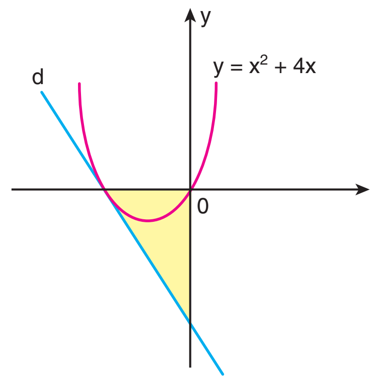
$f(x) = x^2+bx+10$
$f'(x) = 2x+b$
$f''(x) = 2$

$\Rightarrow a^2+ab+10 = 2a+b$ ve

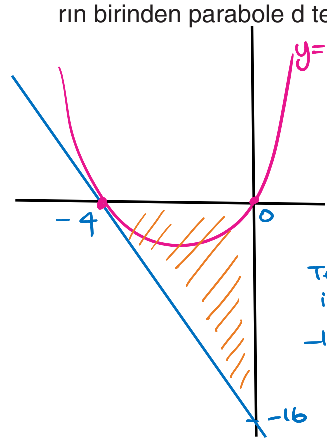
$\Rightarrow 2a+b = 2 \quad \Rightarrow b = 2-2a$ alınırsa

$a^2+2a-2a^2+10 = 2 \Rightarrow a^2-2a-8=0 \Rightarrow a=-2$ alınırsa $b=6$ olur.

5.



Koordinat sisteminde parabolün x eksenini kestiği noktaların birinden parabole d teğeti çiziliyor.



$y = x^2+4x \quad y' = 2x+4$

$y=0$ için $x^2+4x=0$

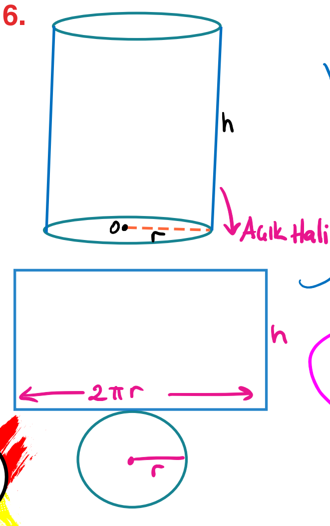
$x(x+4)=0 \Rightarrow x=0, x=-4$

$x=-4$ noktasındaki teğetin eğimi $y'(-4) = -4$ olur.

Teğetin eğiminin -4 olması için y eksenini kestiği nokta -16 olmalı.

Alan $= \dfrac{4 \cdot 16}{2} = 32$ olur.

6.



Hacmi

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 72 \Rightarrow h = \dfrac{72}{\pi r^2}$

Yüzey alanı,

$S = 2\pi r \cdot h + \pi r^2$

Yüzey alanının r'ye bağlı ifadesi

$S(r) = \dfrac{144}{r} + \pi r^2$

$S'(r) = -\dfrac{144}{r^2} + 2\pi r = 0 \Rightarrow \pi r^3 = 72$

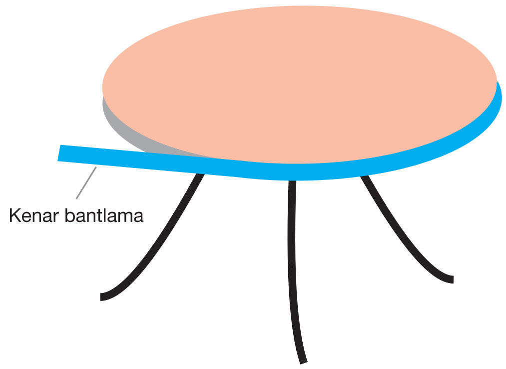
$V = \pi r^2 \cdot h = 72$ denkleminde her iki tarafı r ile çarpalım

$\pi r^3 \cdot h = 72r$

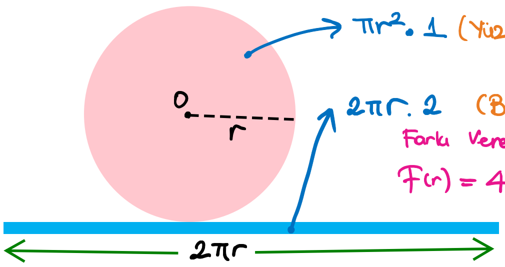
$72 \cdot h = 72r$

$h = r \Rightarrow \dfrac{h}{r} = 1$ olur.

7. Aşağıda bir yuvarlak masa gösterilmiştir.



Masanın daire biçimindeki yüzeyinin çevresine bant çekmenin maliyeti her bir metre uzunluk için 2 TL, masanın yüzeyini boyama maliyeti ise her 1 metre kare alan için 1 TL'dir.



$\pi r^2 \cdot 1$ (Yüzey Boyama Maliyeti)

$2\pi r \cdot 2$ (Bant Maliyeti)

Farkı veren fonksiyon r'ye bağlı

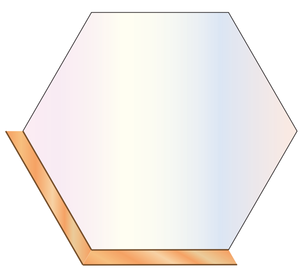
$F(r) = 4\pi r - \pi r^2$

$\Rightarrow F'(r) = 4\pi - 2\pi r = 0$

$r = 2$ olur.

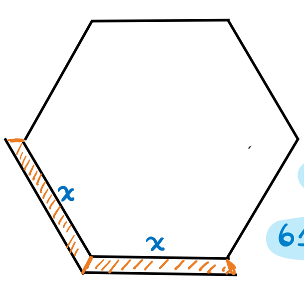
$F(2) = 8\pi - 4\pi = 4\pi$

8.



Yukarıda bir kenarı x br olan düzgün altıgen şeklinde bir ayna gösterilmiştir.

Aynanın çevresine ahşap çerçeve yapmanın maliyeti her bir metre uzunluk için 3 TL, ayna maliyeti ise her 1 metre kare için 1 TL'dir.



Aynanın yüzey alanı $6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Aynanın çevre uzunluğu $6x$

$6x \cdot 3$ Çerçeve Maliyeti

$6\frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot 1$ Aynanın Maliyeti

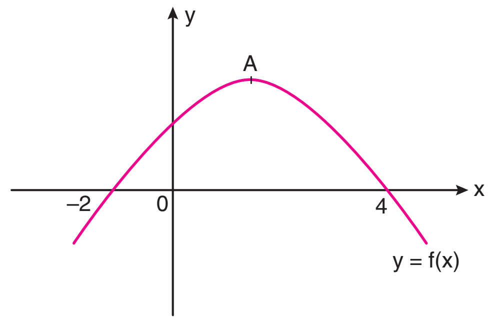
Farkı veren fonksiyonun x'e bağlı ifadesi

$F(x) = 18x - \frac{3x^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F'(x) = 18 - 3x\sqrt{3} = 0$

$\Rightarrow x = 2\sqrt{3}$

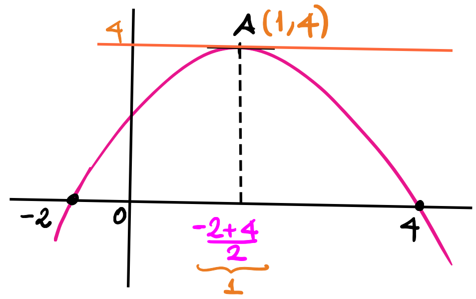
$F(2\sqrt{3}) = 18 \cdot 2\sqrt{3} - 18\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ //

9.



Yukarıda, y = f(x) parabolü y = 4 doğrusuna A noktasında teğettir.

Yerel maksimum nokta



Koordinatları toplamı

$1 + 4 = 5$ dur.

10.
- f(x), tüm reel sayılarda türevlenebilir azalan bir fonksiyondur.
- f(x) fonksiyonunun eğimi sıfır olan herhangi bir teğet doğrusu yoktur.

$$\frac{f'(x) \cdot (2 - x)}{x + 3} < 0$$

Eğimi herhangi bir noktada sıfır olmayan f(x) fonksiyonu tüm reel sayılar için azalan bir fonksiyon ise tüm reel sayılar için $f'(x) < 0$ dır.

$f'(x) \cdot \frac{(2-x)}{(x+3)} < 0$ eşitsizliği için

$\frac{2-x}{x+1} > 0$ olmalıdır.

$2 - x = 0$, $x = 2$ $x + 3 = 0$, $x = -3$

x		-3		2	
$\frac{2-x}{x+3}$	−		+		−

Çözüm aralığımız $(-3, 2)$ olmalıdır.

Bu aralıktaki tamsayılar $-2, -1, 0, 1$

4 tanedir.

11. a, b ∈ $\mathbb{Z}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3$

$g(x) = (a - 2)x^2 + (b - 3)x + 2$

fonksiyonları veriliyor.

f(x) ve g(x) fonksiyonlarının ortak özelliği her ikisinin de artan olmasıdır.

$g(x) = (a-2)\,x^2 + (b-3)\,x + 2$ fonksiyonu için

$a \neq 2$ olsaydı parabolik bir fonksiyon olurdu

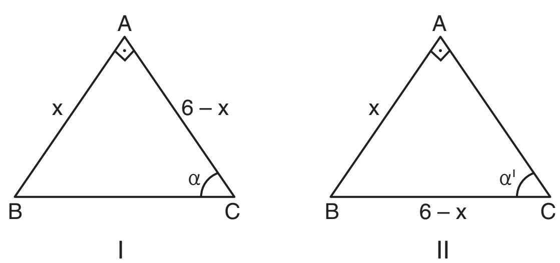
Grafiği ∪ veya ∩ olurdu. Daima artan diyemezdik. Dolayısıyla;

$a = 2$ olmalı! Yani $g(x) = (b-3).x+2$ şeklinde eğimi pozitif, artan doğrusal fonksiyon olmalı. $b-3>0$ olmalı.

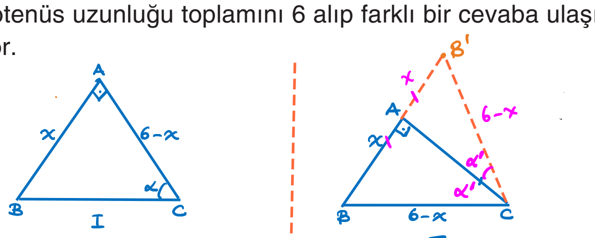
$b>3$, $a=2$ ise $a+b>5$ olur.

a+b toplamının en küçük tamsayı değeri 6 olur.

12.



ABC dik üçgeninin iki dik kenarının toplamının 6 olduğunu söyleyen bir öğretmen, öğrencilerine Alan($\widehat{ABC}$) nin alabileceği maksimum değeri soruyor. Çözümü yapmaya çalışan Eray adındaki bir öğrenci yanlışlıkla bir dik kenar ile hipotenüs uzunluğu toplamını 6 alıp farklı bir cevaba ulaşıyor.



Dik kenarlar toplamı sabit olan bir dik üçgenin alanının en büyük değeri için üçgeni ikizkenar dik üçgen seçmeliyiz.

$\alpha = 45°$

Çevresi sabit bir üçgenin alanının en büyük değeri için üçgen eşkenar üçgen seçilmeli.

Çevre $= x+6-x+x+6-x$
$= 12$

$\alpha' = 30°$ olur.

$\alpha - \alpha' = 45 - 30 = 15°$

13. $f(x) = x^3 - 9x - 1$

$f(x) = x^3 - 9x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 9$

$\Rightarrow f'(x) = 3\,(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$

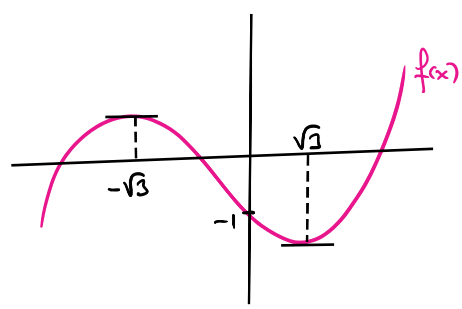
x		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)					

$f(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} - 1$

$f(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} - 1$

$f(0) = -1$

Grafik;



şeklinde olmalı uygun seçenek

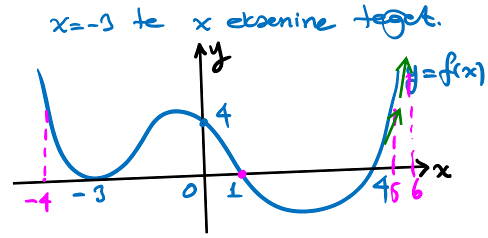
C dır.

14. $f(x) = (x + 3)^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 4) = (x+3)^2 . (x^2 - 5x + 4)$

fonksiyonu veriliyor.

x=1 ve x=4 te x eksenini kesiyor.

x=−3 te x eksenine teğet.



$f'(-4) < 0$ azalan

$f'(-3) = 0$ ekstremum nokta

$f'(1) < 0$ azalan

$f'(5) > 0$ artan

$f'(6) > 0$ artan.

x=6 daki eğim x=5 teki eğimden büyük. $f'(6) > f'(5)$

$f'(x) = 2(x+3)(x^2-5x+4) + (x+3)^2(2x-5)$

$f'(-1) > 0$

A) $f'(5).f'(1) < 0$

B) $f'(-3) = 0$

C) $f'(-4) < 0$

D) $f'(5) < f'(6)$

$\boxed{\text{E) } f'(-1) < 0}$

1. P(x), ikinci dereceden bir polinom fonksiyondur.

$P(2x) = 4 \cdot P(x)$

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(2x) = 4ax^2 + 2bx + c$

$P(2x) = 4 \cdot P(x) \Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 4(ax^2 + bx + c)$

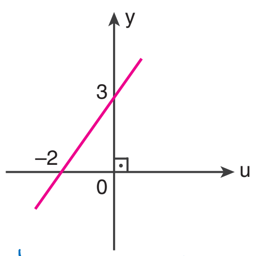
$\Rightarrow 4ax^2 + 2bx + c = 4ax^2 + 4bx + 4c$ $\quad 2b = 4b \Rightarrow b = 0$

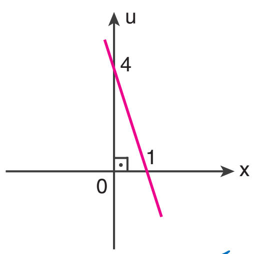
$c = 4c \Rightarrow c = 0$ olmalı.

$P(x) = ax^2$ olur. $P'(x) = 2ax$

$\left.\begin{matrix} P'(6) = 12a \\ P'(2) = 4a \end{matrix}\right\} \dfrac{P'(6)}{P'(2)} = 3$ olur.

2.

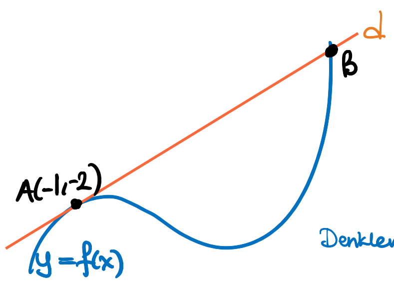




$y = \frac{3}{2} \cdot u + 3$ $\qquad u = -4x + 4$

$\dfrac{dy}{dx} = \underbrace{\dfrac{dy}{du}}_{\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\dfrac{du}{dx}}_{-4} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2} \cdot (-4) = -6$ olur.

3. $f(x) = x^3 - x^2$ eğrisinin A(–1, –2) noktasındaki teğeti, eğriyi bir B noktasında kesiyor.



d doğrusunun denklemini bulalım.

Eğim $f'(-1)$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f'(-1) = 5$ (Eğim)

Denklemi $y - (-2) = 5(x - (-1))$

$y = 5x + 3$ olur.

Ortak çözüm yapalım.

$x^3 - x^2 = 5x + 3 \Rightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

$x^3 + x^2 - x^2 - x^2 - 5x - 3 = 0$

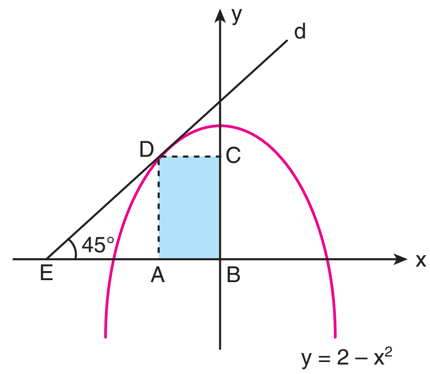
$x^2(x+1) - (2x^2 + 5x + 3) = 0$

$x^2(x+1) - (2x+3)(x+1) = 0$

$(x+1)(x^2 - 2x - 3) = 0 \quad (x+1)^2(x-3) = 0$

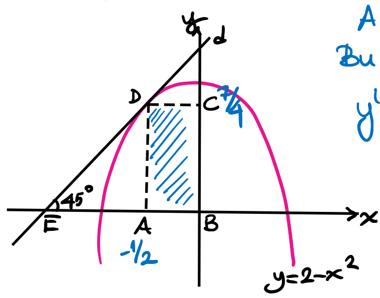
$x = 3$

4.



ABCD bir dikdörtgen, d doğrusu f fonksiyonunun grafiğine D noktasında teğettir.

$m(\widehat{DEA}) = 45°$



A noktasının apsisi a olsun.
Bu noktadaki eğim

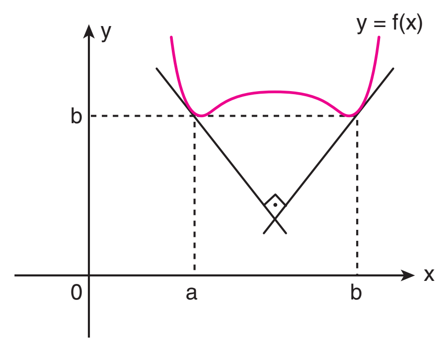
$y'(a) = -2a = \tan 45°$

$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$y(-\frac{1}{2}) = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$\text{Alan}(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{8}$

5.



y = f(x) fonksiyonunun x = a ve x = b noktalarındaki teğetleri dik kesişmektedir.

$g(x) = (f \circ f)(x)$

$\left.\begin{matrix} x=a \text{ noktasındaki eğim } f'(a) \\ x=b \text{ noktasındaki eğim } f'(b) \end{matrix}\right\}$ Teğetler dik kesiştiğinden

$f'(a) \cdot f'(b) = -1$

$f(a) = f(b) = b$ olduğu grafikten görülüyor.

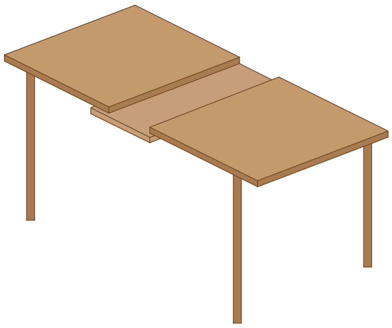
$g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$ $\quad x = a$ için,

$g'(a) = f'(\underbrace{f(a)}_{b}) \cdot f'(a)$

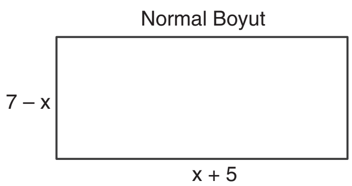
$g'(a) = \underbrace{f'(b) \cdot f'(a)}_{-1} = -1$

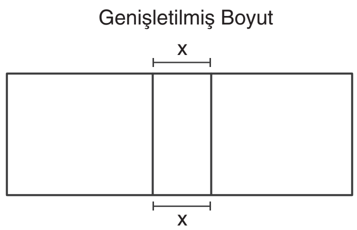
Verilen bilgiler yeterlidir.

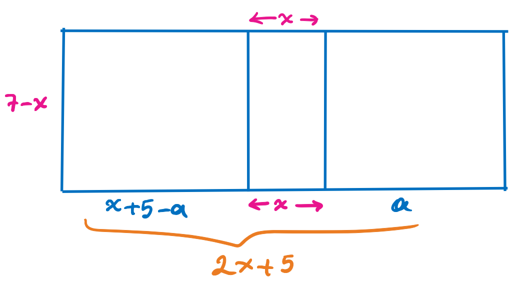
6. Aşağıda genişleyebilen dikdörtgen şeklinde bir masa verilmiştir.



Masanın normal boyutu ve genişletilmiş boyutu aşağıdaki gibidir.







Alanı veren fonksiyon x cinsinden

$A(x) = (7-x).(2x+5)$

$A'(x) = -1.(2x+5) + (7-x).2$

$A'(x) = -4x+9 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

7. Ali 1'den 20'ye kadar ileri, Fatih 20'den 1'e kadar geriye doğru sayarken aşağıdaki işlemleri yapmaktadır.

Ali, söylediği her sayının karesini almaktadır.

Fatih ise söylediği her sayıyı 8 ile çarpmaktadır.

Böylece buldukları her sayıyı her aşamada toplamaktadırlar.

Ali	1	4	...
Fatih	160	152	...
TOPLAM	161	156	...

	1.adım	2.adım		x.adım	
Ali	1^2	2^2	. . .	x^2	
Fatih	20.8	19.8	. . .	(21-x).8	
TOPLAM	161	156	. . .		

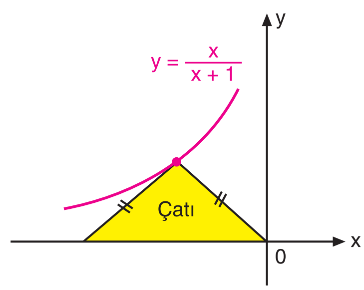
$x^2 + (21-x).8$

Toplamın x'e bağlı ifadesi

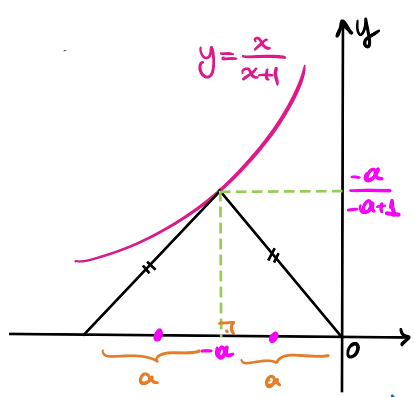
$T(x) = x^2 - 8x + 168 \quad T'(x) = 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$

$T(4) = 16 - 32 + 168 \Rightarrow T(4) = 152$

8. Aşağıda bir binanın çatısı ve çatısı üzerindeki bir noktaya monte edilmiş çanak antenin karşıdan görünüşü verilmiştir.



Verilen görüntüde; çatı ikizkenar üçgen, çanak anten ise $y = \frac{x}{x+1}$ eğrisinin ikinci bölgedeki bir kısmıdır.



Alanı veren fonksiyonun a cinsinden ifadesi

$A(a) = \dfrac{2a.\left(\frac{-a}{-a+1}\right)}{2}$

$A(a) = \dfrac{-a^2}{-a+1}$

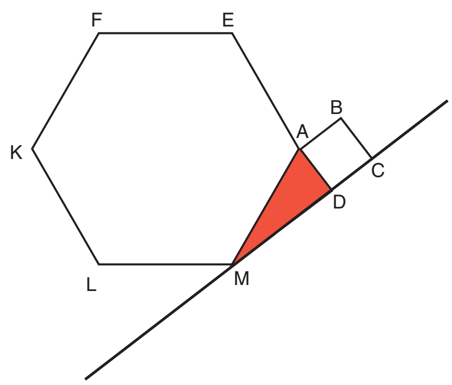
$A'(a) = \dfrac{-2a.(-a+1) - (-a^2).(-1)}{(-a+1)^2}$

$\Rightarrow A'(a) = \dfrac{a^2 - 2a}{(-a+1)^2} = 0$

$\Rightarrow a = 2$ dur.

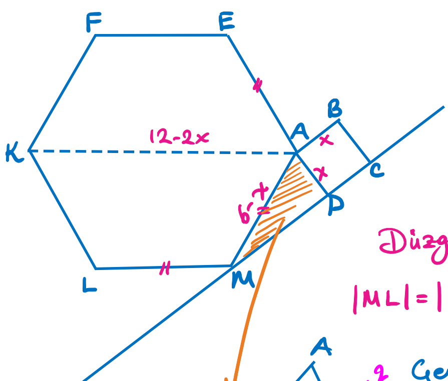
$A(2) = \frac{-4}{-1} = 4$ br^2 dur.

9.



Yukarıda AEFKLM düzgün altıgeni ve ABCD karesi verilmiştir.

|AK| + 2|AB| = 12 birim

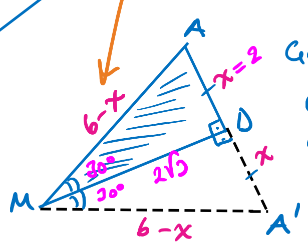


$|AK| + 2\underbrace{|AB|}_{x} = 12$

$\Rightarrow |AK| = 12 - 2x$

Düzgün altıgenden,

$|ML| = |MA| = \frac{12-2x}{2} = 6 - x$



Çevre (MAA') = 12

Çevresi bilinen üçgenin alanının en büyük değeri için eşkenar üçgen seçmeliyiz.

$\text{Alan}(MAD) = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ br² olur.

10. 0 < a < 1 olmak üzere,

Mert'in bir hedefi vurma olasılığı a'dır.

✓ Mert'in hedefi vurma olasılığı a ise
✗ Mert'in hedefi vuramama olasılığı 1−a dır.

3 atış ✗ ✗ ✓ şeklinde olmalı.

Yalnızca 3. atışta vurma olasılığının a cinsinden ifadesi

$P(a) = (1-a)(1-a) \cdot a \Rightarrow P(a) = (1-a)^2 \cdot a$

$P'(a) = 2(1-a) \cdot (-1) \cdot a + (1-a)^2 \cdot 1$

$P'(a) = (1-a)(1-3a) = 0 \Rightarrow a = 1$ kesin olasılık olamaz.

$a = 1/3 \rightarrow$ olmalı

$a = \frac{1}{3}$ için $P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$

$P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$ //

11.

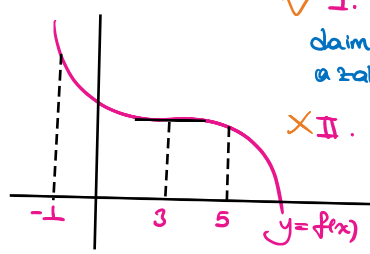
- f : ℝ → ℝ tanımlı ve her noktada türevli bir fonksiyondur.
- f fonksiyonu [–1, 5] aralığında azalandır.

I. Fonksiyon [–1, 5] aralığında bire birdir.

II. $f'(3) > 0$

III. $f(0) > f(2)$

Grafik temsilen,



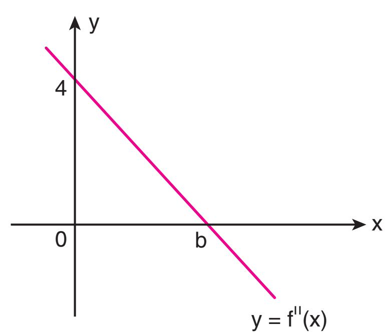
✓ I. Uygun tanım aralığında daima artan veya daima azalan fonksiyonlar bire-birdir.

✗ II. Grafik üzerinde görüldüğü üzere $f'(3) = 0$ olabilir.

✓ III. f azalan fonksiyon olduğundan

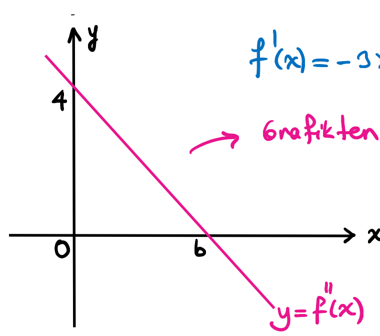
$0 < 2$ iken $f(0) > f(2)$ dir.

12.



Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun ikinci türevinin grafiği verilmiştir.

$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 6$



$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 6 \Rightarrow f''(x) = -6x + 2a$

Grafikten $f''(0) = 6 \Rightarrow f''(0) = 2a = 4$

$\Rightarrow a = 2$

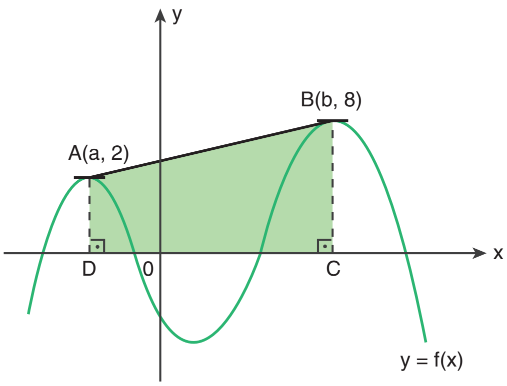
$f''(x) = -6x + 4$

$f''(b) = 0$ olduğundan

$-6b + 4 = 0 \Rightarrow b = 2/3$

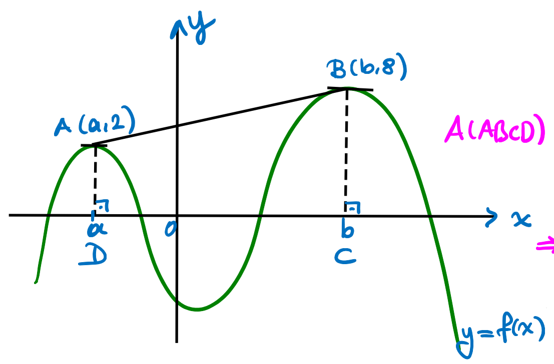
ACİL MATEMATİK

13.



Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

ABCD bir dik yamuk, A(a, 2), B(b, 8) ve A(ABCD) = 40 br² dir.

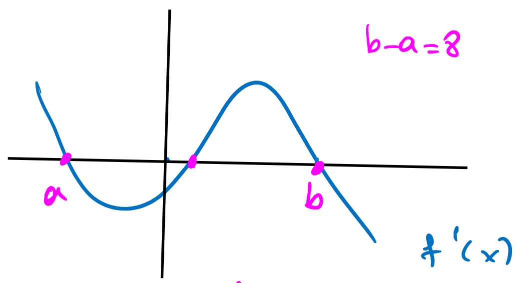


$A(ABCD) = \dfrac{(8+2)(b-a)}{2} = 40$

$\Rightarrow 10(b-a) = 80$

$\boxed{b-a=8}$

$b-a=8$



uygun grafik B seçeneğindedir.

14. f türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\underbrace{(x-2)}_{x=2} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\text{Kökleri } -1 \text{ ve } 2 \text{ gelmeli}} \leq 0$$

eşitsizliğinin çözüm kümesi $[-1,2] \cup [5,\infty)$ olduğuna göre çözüm tablosu aşağıdaki gibi olmalıdır.

f'(x) çarpanının kökleri

x		-1		2		5	
$(x-2).f'(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$

f'(x) in başkatsayısı negatif olmalı.

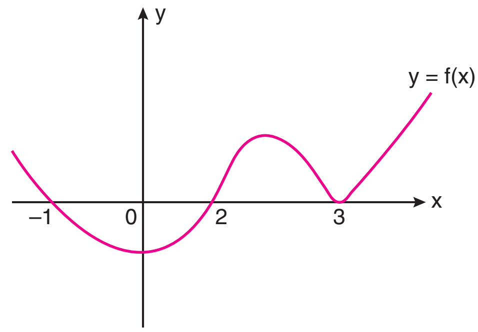
f'(x) için ayrı bir tablo yapalım.

x		-1		5	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
$f(x)$					

$\Rightarrow x=-1$, f(x) için yerel minimum nokta olduğundan grafik 1 br ötelenirse f(x-1) için $-1+1=0$ yerel minimum noktanın apsisi olur.

15. $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



f(x) fonksiyonunun başkatsayısı 1 ve kökler -1, 2 ve 3 tür. $x=3$ te çift katlı köke sahiptir.

$x^4+bx^3+cx^2+dx+e = (x+1)(x-2)(x-3)^2$

$x=0$ için $e=-18$

$x=1$ için $1+b+c+d+(-18) = -8 \Rightarrow b+c+d=9$

$x=-1$ için $1-b+c-d-18 = 0 \Rightarrow -b+c-d=17$

$+$

$2c=26 \Rightarrow c=13$

16. $f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+1)^2$

fonksiyonu veriliyor.

I. $g(x) = (x+1)(x-1)^3(x+1)^2$

$\Rightarrow g(x) = \underbrace{(x-1)^3}_{x=1} \underbrace{(x+1)^2}_{x=-1}$ işaretini inceleyelim.

X

x		-1		1	
$f(x)$	$-$		$-$		$+$

x ekseni üstünde yer alır.

II. $h(x) = (1-x)(x-1)^3(x+1)^2$

$h(x) = -\underbrace{(x-1)^4}_{x=1} \cdot \underbrace{(x+1)^2}_{x=-1}$

✓

x		-1		1	
$h(x)$	$-$		$-$		$-$

x ekseni üstünde yer almaz.

III. $k(x) = (x^2-x)(x-1)^3(x+1)^2$

X

$k(x) = x(x-1)(x+1)(x-1)^3(x+1)^2$

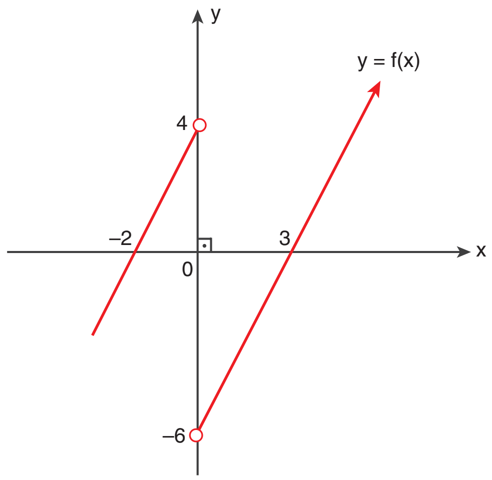
$k(x) = \underbrace{x}_{x=0} \underbrace{(x-1)^4}_{x=1} \underbrace{(x+1)^3}_{x=-1}$

x		-1		0		1	
$k(x)$	$+$		$-$		$+$		$+$

x ekseninin üstünde yer alır.

Yalnız II

1.



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

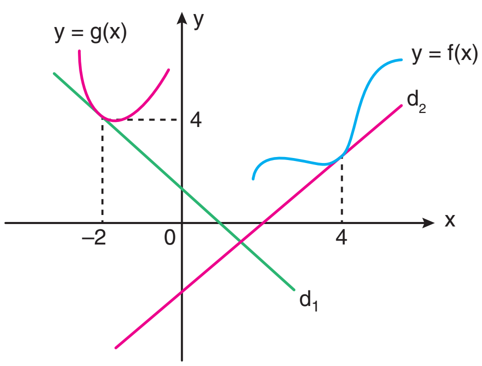
$f(x) = \begin{cases} 2x+4 , & x<0 \\ 2x-6 , & x>0 \end{cases}$

$x<0$ için $2x+4 = (2x+4)' \Rightarrow 2x+4 = 2 \Rightarrow x=-1$

$x>0$ için $2x-6 = (2x-6)' \Rightarrow 2x-6 = 2 \Rightarrow x = 4$

$-1+4 = 3$ //

2.



Şekilde, f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri ve d_1, d_2 doğruları verilmiştir.

$d_1 \perp d_2$ ve $(f \circ g)(x) = x^3 - nx + 3$

$(f \circ g)(x) = x^3 - nx + 3$ (Eşitliğin her iki tarafının türevini alalım.)

$f'(g(x)).g'(x) = 3x^2 - n$ $(x=-2$ için$)$

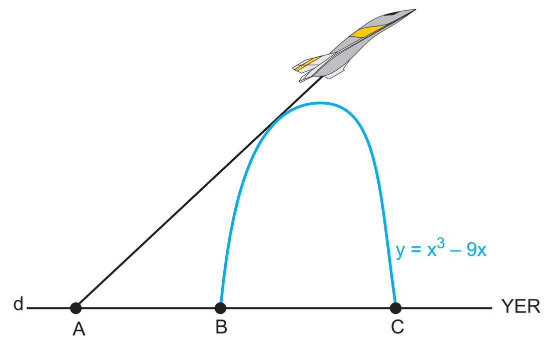
$f'(\underbrace{g(-2)}_{4}).g'(-2) = 12-n$ (grafik üzerinden $g(-2)=4$ ve $d_1 \perp d_2$ olduğundan $f'(4).g'(-2) = -1$)

$\underbrace{f'(4).g'(-2)}_{-1} = 12-n$

$-1 = 12-n$

$\Rightarrow n = 13$ dur.

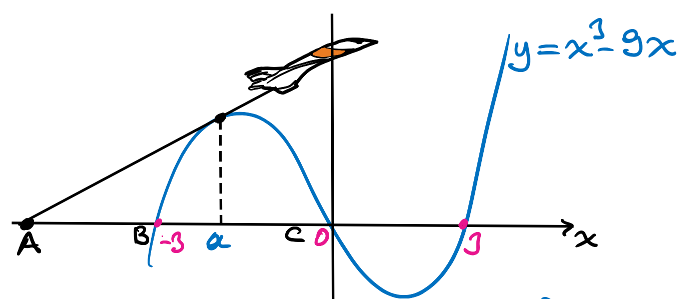
3. Aşağıda bir dağın bir kesiti gösterilmiştir. Gösterilen kesit üçüncü dereceden bir polinom fonksiyonun grafiğinin bir kısmıdır.



Bir uçak doğrusal d pistinin A noktasına gelince belli bir açıyla havalanmış ve doğrusal bir yol izleyerek dağı teğet geçmiştir.

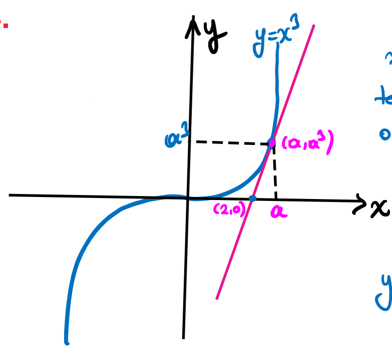
$y = x^3 - 9x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$y = x(x-3)(x+3)$ x eksenini kestiği noktaların apsisi -3 , 0 ve 3 tür. Başkatsayı pozitiftir.



Teğet değme noktası $a \in (-3,0)$ olmalı.
Cevap -2 olabilir (D) dir.

4.



$x=a$ noktasında çizilen teğeti x eksenini apsisi 2 olan noktada kessin.

$x=a$ noktasındaki teğetin eğimi

$y'(a) = 3a^2 = \underbrace{\dfrac{a^3-0}{a-2}}$ iki noktası bilinen doğrunun eğimi

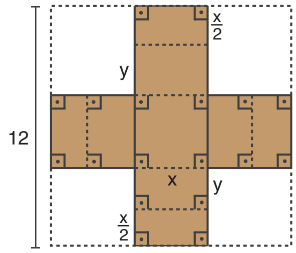
$\Rightarrow 3a^2 = \dfrac{a^3}{a-2} \Rightarrow 3a-6 = a$

$\Rightarrow a=3$ olur.

$y(3) = 3^3 = 27$

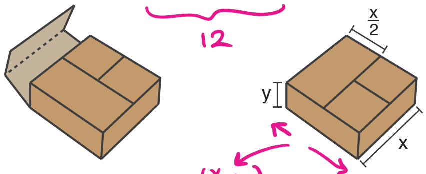
(3, 27) noktası

5.



Şekil 1

$\leftarrow \underbrace{2\left(y+\frac{x}{2}\right)}_{12} + x \rightarrow$



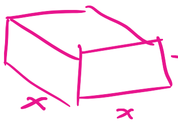
Şekil 2 Şekil 3

$12-2\left(\frac{x}{2}+y\right)$

$12-2y-x$

Bir kenarı 12 cm olan kare şeklindeki bir kartonun dört köşesinden bir kenarı $\left(\frac{x}{2}+y\right)$ cm olan kare şeklinde 4 eş parça kesilip atılıyor. Kalan parça kesikli yerlerden katlanıp Şekil 3'teki bir kenarı x cm olan kare tabanlı kutu yapılıyor.

$2y+2x=12 \Rightarrow y=6-x$ $\underbrace{12-2(6-x)-x}$



Hacmin x'e bağlı fonksiyonu

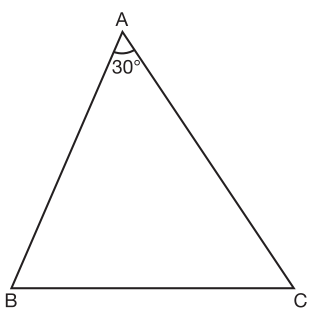
$V(x)=x.x.(6-x)$

$V(x)=6x^2-x^3$

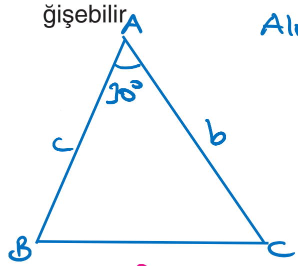
$\Rightarrow V'(x)=12x-3x^2=0 \Rightarrow x=4 \quad V(4)=32$

6. Aşağıdaki şekilde kesin olan bilgiler,

- ABC üçgendir.
- $m(\widehat{A})=30°$dir.
- $A(ABC)=9$ br^2 dir.



Şekilde; AB, AC, BC uzunlukları ile B ve C açılarının ölçüleri yukarıda belirtilen kesin bilgiler korunacak biçimde değişebilir.



$Alan(ABC)=\frac{1}{2}.b.c.\sin 30$

$9=\frac{1}{2}.b.c.\frac{1}{2} \Rightarrow b.c=36$

b+c nin en küçük değeri için

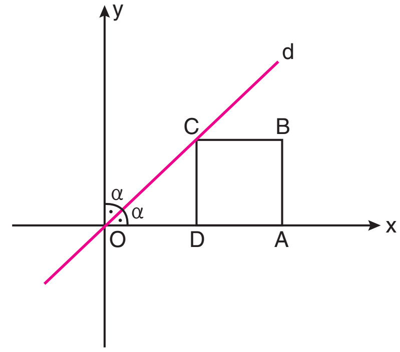
$b=\frac{36}{c} \Rightarrow c+\frac{36}{c}$

istenilen ifadenin c cinsinden eşiti

$I(c)=c+\frac{36}{c} \Rightarrow I'(c)=1-\frac{36}{c^2}=0 \quad c=6 \; b=6$

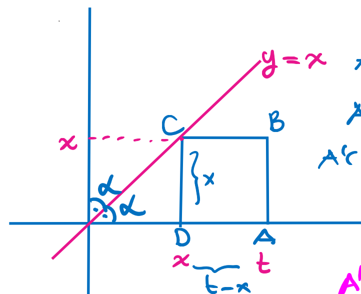
$b+c=12$

7.



Yukarıda verilen şekilde d doğrusu ile ABCD dikdörtgeninin ortak noktası C olmak üzere, A noktası sabit bir noktadır.

t sabit bir sayı olmak üzere

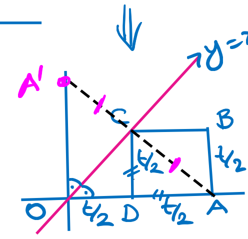


Alanı veren fonksiyon

$A(x)=x.(t-x)$

$A'(x)=t-x-x=0 \Rightarrow x=t/2$

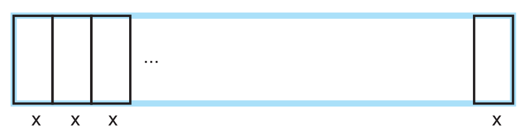
$\Downarrow$



ABCD bir kare, A noktasının y=x doğrusuna göre simetriği A' noktası y ekseni üzerinde ve |OA| = 2|AB| olduğu şekilden görülüyor

Cevap I, II ve III tür.

8. Kısa kenarı x birim ve alanı 2000 br^2 olan bir dikdörtgenden x tane yan yana dizerek aşağıda mavi renkle gösterilen dikdörtgen elde edilmiştir.



x tane uzunluğu $x.x=x^2$ olur.

Çevrenin x cinsinden eşiti

$Ç(x)=2\left(x^2+\frac{2000}{x}\right) \Rightarrow Ç'(x)=2\left(2x-\frac{2000}{x^2}\right)=0$

$\Rightarrow x^3=1000 \Rightarrow x=10$ olur.

$Ç(10)=600$ olur.

9. $f(x) = (3x^2 - 6x + a)^2$

$f'(x) = 2(3x^2 - 6x + a).(6x - 6)$

ifadesinin işaret değiştirdiği bir kök vardır.

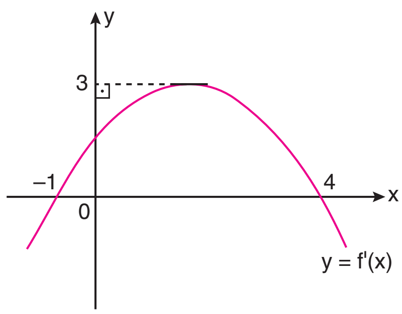
$f'(x) = 2(\underbrace{3x^2 - 6x + a}) \underbrace{(6x - 6)}$

$\Delta \leq 0$

$36 - 4.3.a \leq 0$

$3 \leq a$

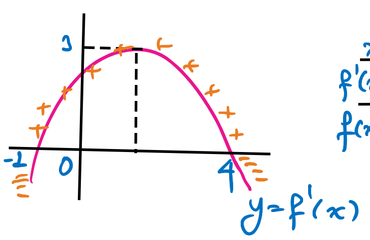
10. y = f(x) fonksiyonunun türevinin grafiği aşağıda verilmiştir.



I. f(x) fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi 4 tür.

II. f(x) – 3x fonksiyonu daima azalandır.

III. f(2 – x) fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisler toplamı 1 dir.



x		-1		4	
f'(x)	–	0	+	0	–
f(x)	↘		↗		↘

✓ I. x = 4 te yerel max. vardır.

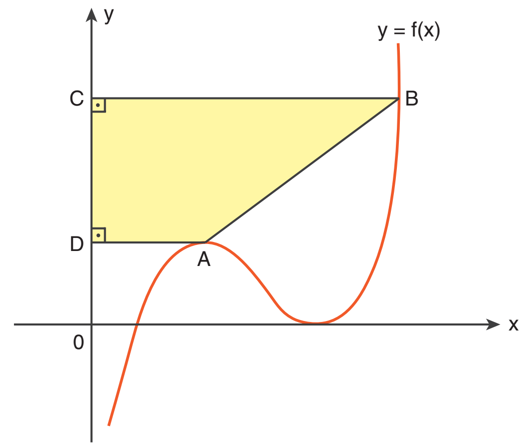
✓ II. $f(x) - 3x \Rightarrow f'(x) - 3 \leq 0$ (grafiğe göre) olacağından $f(x) - 3x$ azalandır.

✓ III. $f(2-x)$ fonksiyonunun türevi $-f'(2-x)$ için ekstrem noktalar

$2 - x = -1$ ve $2 - x = 4$

$x = 3$ ve $x = -2$ $\quad 3 + (-2) = 1$

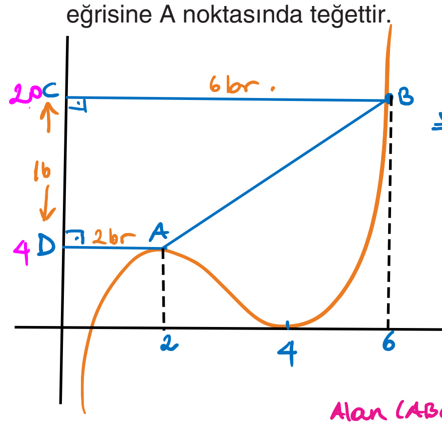
11.



Yukarıda verilen dik koordinat sisteminde ABCD bir dik yamuktur.

[AD], $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

eğrisine A noktasında teğettir.



$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f'(x) = 3(x^2 - 6x + 8) = 0$

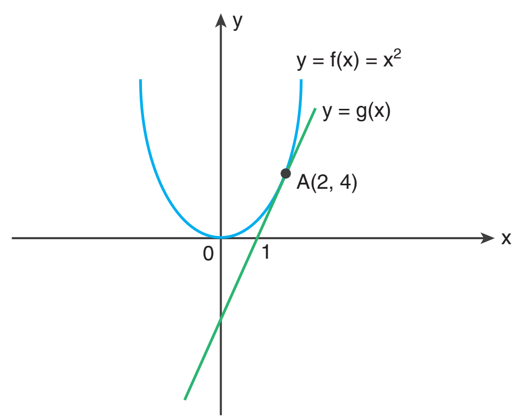
x		2		4	
f'(x)	+	0	–	0	+
	↗		↘		↗

$f(2) = 4$

$f(6) = 20$

$\text{Alan}(ABCD) = \dfrac{(6+2).16}{2} = 64 \text{ br}^2$

12.



Yukarıda, $y = f(x) = x^2$ eğrisine üzerindeki A(2, 4) noktasından y = g(x) teğet doğrusu çiziliyor.

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f'(2) = 4$

x=2 deki teğetin eğimi

$y - y_1 = m(x - x_1)$

eğimi ve bir noktası bilinen doğrunun denklemi

$y - 4 = 4(x - 2)$

$\Rightarrow g(x) = 4x - 4$

$f(x).g(x) = x^2(4x - 4)$

$\Rightarrow (f.g)'(x) = 2x(4x-4) + x^2.4$

$= 2x(6x - 4)$

$x = 0 \quad x = 2/3$

x		0		2/3	
f.g	+		–		+

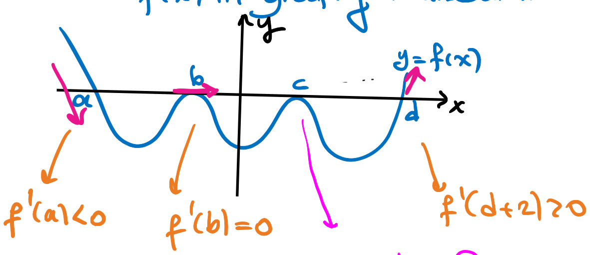
$(fg)(\frac{2}{3}) = -\frac{16}{27}$

13. $a < b < 0 < c < d$ olmak üzere,

$$f(x) = (x - a) \cdot (x - b)^2 \cdot (x - c)^2 \cdot (x - d)$$

fonksiyonu veriliyor.

f(x) in grafiğini çizelim.

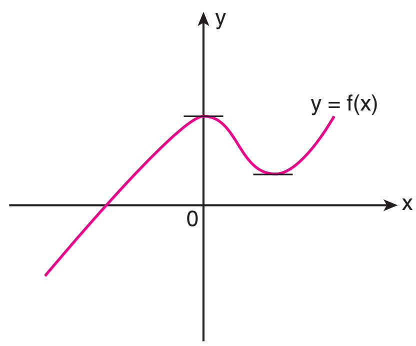


$x=c$ de eğimin artış hızı azaldığından $f''(c)<0$

$x=b+1$ noktasının hangi aralığa girdiğini bilmediğimizden yorumlanamaz. Yanlış veya doğru olabilir.

Cevap E seçeneğidir.

14.



$$f(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + ax + b)$$

fonksiyonunun grafiği veriliyor.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$ x eksenini tek noktada kestiğinden x^2+ax+b için $\Delta<0$ koşulu sağlanmalı! $\boxed{a^2-4 \cdot b<0}$

$f'(x)=x^2+ax+b+(x+2)(2x+a)$

$f'(x)=3x^2+(2a+4)x+2a+b$

$x=0$ da yerel minimum olduğundan

$f'(0)=0 \Rightarrow 2a+b=0 \Rightarrow b=-2a$

$a^2+8a<0 \Rightarrow a(a+8)<0$

0   −8

a	−8		0	
+		−		+

$\rightarrow -8<a<0$ ama

$f'(x)=x(3x+2a+4)=0 \Rightarrow x=\frac{-2a-4}{3}>0$

olduğundan $a<-2$ $\rightarrow -8<a<-2$

$-7-6-5-4-3=-25$

15. $f(x) = x^3 + x + 1$

$f(x)=x^3+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+1$

Tüm gerçek sayılar için $f'(x)>0$ olduğundan $f(x)$ daima artandır.

Bu koşulu sağlayan tek seçenek B dir.

16. $f(x) = x^3 + 3x^2 - ax + 6$

Fonksiyonun bire-bir ve örten olması için başkatsayı pozitif olduğundan daima artan (ekstremum nokta yok) olması gerekir.

$f'(x)=3x^2+6x-a$ ifadesi için $\Delta\leq0$ olmalı.

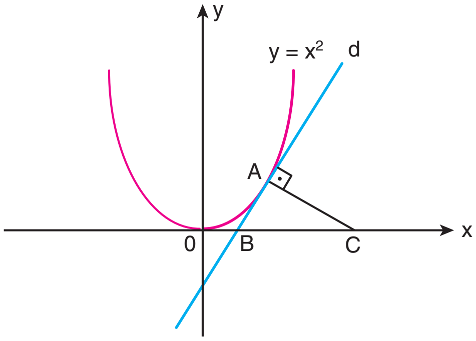
$36-4\cdot3(-a)\leq0 \Rightarrow 12a\leq-36$

$\Rightarrow a\leq-3$ olmalı.

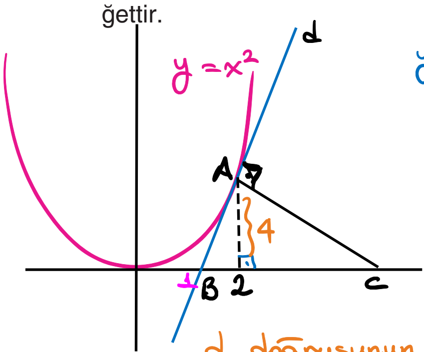
1. C	2. A	3. D	4. C	5. E	6. E	7. E	8. B
9. D	10. E	11. D	12. B	13. E	14. D	15. B	16. B

ACİL MATEMATİK

1.

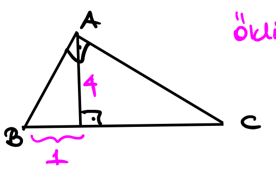


d doğrusu $y = x^2$ parabolüne apsisi 2 olan A noktasında teğettir.



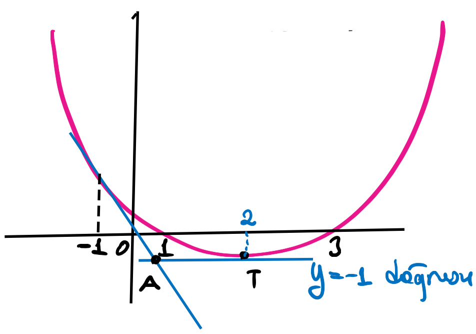
$y(2)=4$
A noktasının koordinatı (2,4)
$y'(x)=2x$, $y'(2)=4$
d doğrusunun eğimi 4

d doğrusunun eğimi 4 olduğundan A noktasının apsisi 1 dir.



öklid uygulanırsa $4^2=1.x$
$x=16$
$|BC|=17$ olur.
$A(ABC)=\frac{17.4}{2}=34$ olur.

2. $f(x) = x^2 - 4x + 3$



$f(x)=x^2-4x+3$
$f'(x)=2x-4$
$f(-1)=8$
$f'(-1)=-6$

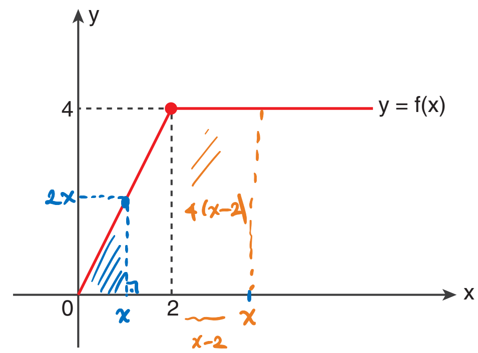
(−1,8) noktasından geçen eğimi −6 olan doğrunun denklemi
$y-8=-6(x+1)$
$y=-6x+2$

Tepe noktasındaki teğeti $f'(x)=2x-4=0$
$x=2$
$f(2)=-1$ $y=-1$ doğrusudur.

$y=-1$ ve $y=-6x+2$ doğrularında ortak çözüm yapılırsa.
$-1=-6x+2 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ olur.

3. Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$



g(x) fonksiyonu 0'dan x'e kadar f(x) fonksiyonunun x ekseni ile oluşturduğu kapalı bölgenin alanı olmak üzere,

✓ I. g(x) fonksiyonu x = 2'de süreklidir.

✓ II. g(x) fonksiyonu x = 2'de türevlidir.

✗ III. g'(3) = 0'dır.

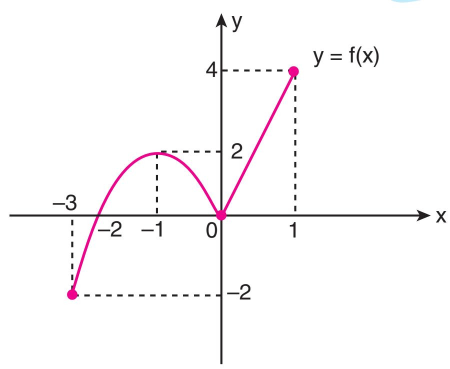
$g(x)=\begin{cases}\frac{x.2x}{2}, & x\le 2\\ \frac{4.2}{2}+4(x-2), & x>2\end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 2\\ 4x-4, & x>2\end{cases}$

$\underbrace{\lim_{x\to 2^+} g(x)}_{4}=\underbrace{\lim_{x\to 2^-} g(x)}_{4}=\underbrace{g(2)}_{4}$ x=2 de sürekli

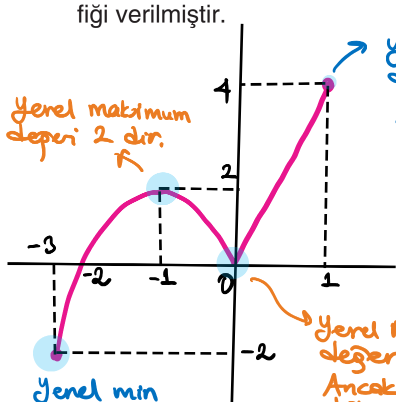
$\underbrace{f'(2^+)}_{4}=\underbrace{f'(2^-)}_{4}$ x=2 de türevli

x>2 için
$g'(x)=4$
$g'(3)=4$

4.



Şekilde [–3, 1] aralığında tanımlı y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Yerel maksimum değeri 2 dir.

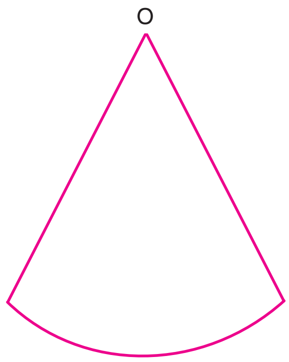
Yerel Maksimum nokta. değeri 4 tür. Aynı zamanda f(x) in en büyük değeri olduğundan mutlak maksimum noktadır.

Yerel minimum nokta değeri 0 dır. Ancak sivri nokta türev yoktur.

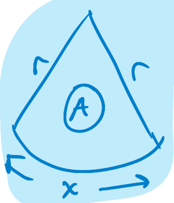
Yerel min nokta ve değeri −2 dir. Aynı zamanda f(x) in en küçük değeridir mutlak minimumdur.

Bu bilgilere göre cevap E seçeneği

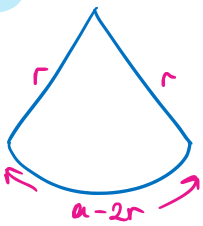
5.



a cm uzunluğundaki bir tel bükülerek şekildeki gibi bir daire dilimi elde ediliyor.



Alan $= \frac{x.r}{2}$ dir.



Alanın r cinsinden ifadesi

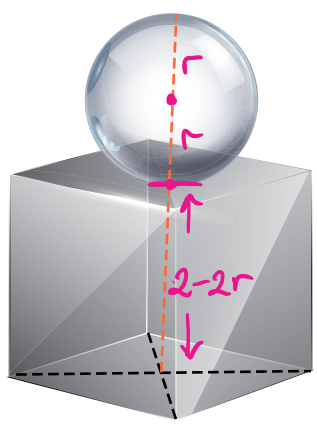
$A(r) = \frac{(a-2r).r}{2}$

$A'(r) = \frac{-2.r + a - 2r}{2} = 0$

$r = \frac{a}{4}$ olur.

$A\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2}{16}$ olur.

6.



Ödül töreninde verilmek üzere, kristalden yapılmış bir küp üzerine yine kristalden yapılmış bir küre yerleştirilecektir. Kürenin yüzeyi ile küpün tabanının ağırlık merkezi arasındaki maksimum uzaklık 2 birimdir.

Kürenin yüzey alanı $4\pi r^2$

Kübün yüzey alanı $6.(2-2r)^2$

Toplam alanın r cinsinden ifadesi

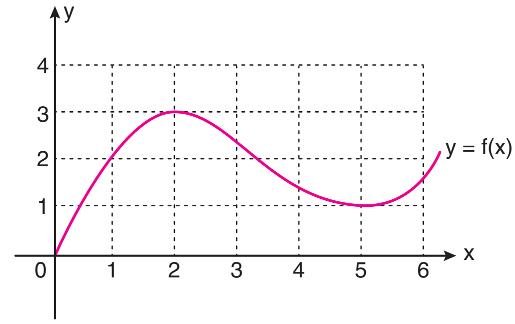
$T(r) = 4\pi r^2 + 6(2-2r)^2$

$T'(r) = 8\pi r + 12(2-2r).(-2) = 0$

$\Rightarrow 8\pi r + 48r = 48$

$\Rightarrow r(8\pi + 48) = 48 \Rightarrow r = \frac{6}{\pi+6}$

7.



Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

I. $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(5)$

II. [2, 5] aralığında f fonksiyonunun ortalama değişim hızı $\frac{2}{3}$ tür.

III. $f'(1) > f'(5)$

✓ I. Grafikten $f'(2) = 0$, $f'(5) = 0$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = f'(5) = 0$

✗ II. [2,5] aralığında ortalama değişim hızı $\frac{f(5) - f(2)}{5-2} = \frac{1-3}{3} = \frac{-2}{3}$ tür

✓ III. $f'(1) > 0$ $f'(5) = 0$ olduğundan $f'(1) > f'(5)$ tir.

I ve III

8.

Rolle Teoremi:
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ için türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c sayısı vardır.

$f(x) = (x - 2) \cdot (x + 5) + 3$

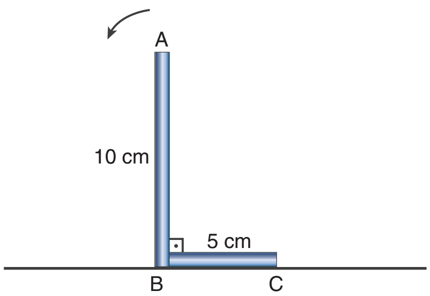
Bu aralıkta türevi 0 yapan nokta

$f'(x) = (x+5) + (x-2) = 2x+3$

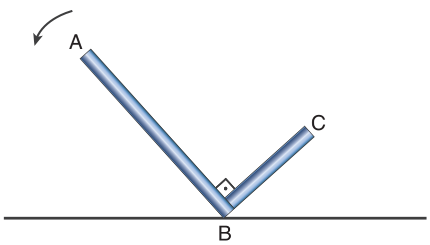
$f'(x) = 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

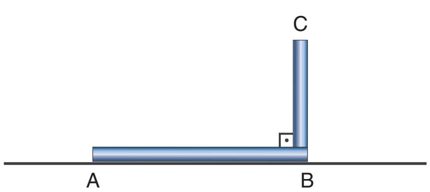
9. Şekilde kalınlıkları önemsenmeyen 10 cm ve 5 cm uzunluğunda iki çubuk gösterilmiştir.

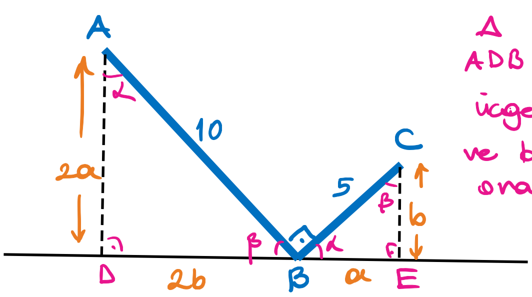
Bu çubuklar birbirine B noktasında sabitlenmiş olup bu çubuklardan birinin hareket etmesi diğerini de harekete geçirmektedir.



AB çubuğu B noktası sabit kalmak üzere sol tarafa doğru iteklendiğinde sistem sol tarafa aşağıdaki gibi hareket ederek devrilmiştir.







$\triangle ADB$, $\triangle BEC$ üçgenleri benzer ve benzerlik oranı $10 : 5 = 2$

$2a+b$ ifadesinin en büyük değerini istiyoruz.

$a^2+b^2=25 \Rightarrow b=\sqrt{25-a^2}$ olduğundan.

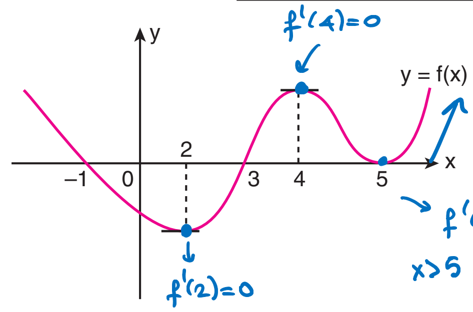
$2a+b$ ifadesinin a cinsinden eşiti,

$f(a)=2a+\sqrt{25-a^2} \Rightarrow f'(a)=2+\dfrac{-2a}{2\sqrt{25-a^2}}=0$

$2\sqrt{25-a^2}=a \Rightarrow 4(25-a^2)=a^2 \Rightarrow a=2\sqrt{5}$

$f(2\sqrt{5})=4\sqrt{5}+\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

10.



$f'(4)=0$

$f'(x)>0$

$f'(5)=0$

$x>5$ için $f'(x)>0$

$f'(2)=0$

Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$x \cdot f'(x) \leq 0$

$x=0$ $\quad$ $x=2,\ x=4,\ x=5$

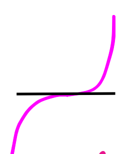
x		0		2		4		5	
$f'(x)$	+		−		+		−		+

Çözüm aralığı $[0,2] \cup [4,5]$

Bu aralıktaki x tamsayıların toplamı

$0+1+2+4+5=12$ dir.

11. $y = x^3 - (a+1)x^2 + 3x - 4$



$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ daima artan

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ için $\Delta \leq 0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ daima artan

Tüm teğetler pozitif eğimli

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$ için $\Delta < 0$ olmalı.

$y=x^3-(a+1)x^2+3x-4$

$\Rightarrow y'=3x^2-2(a+1)x+3$ $\quad$ $\Delta<0$ alınırsa

$4(a+1)^2-4.3.3<0$

$(a+1)^2<9 \Rightarrow -3<a+1<3$

$-4<a<2$

a nın en küçük tamsayı değeri -3 tür.

ACİL MATEMATİK

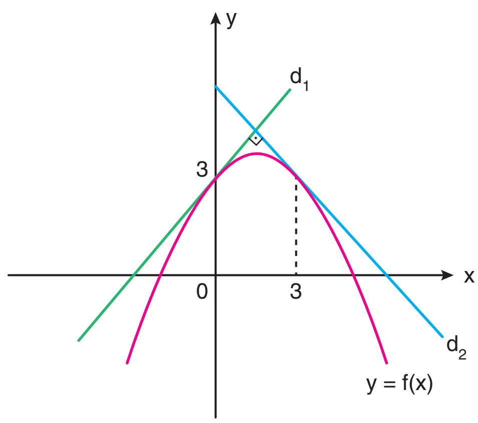
1. $f(x + y) - f(x - y) = x^4 \cdot y$

eşitliğin her iki tarafının y değişkenine bağlı türevini alalım.

$f'(x+y) + f'(x-y) = x^4$ ($x=2$ ve $y=0$ için)

$f'(2) + f'(2) = 16 \Rightarrow f'(2) = 8$ olur.

2.



Şekilde, f(x) fonksiyonunun x = 0, x = 3 noktalarındaki teğet doğruları verilmiştir.

$g(x) = (f \circ f)(x)$

$x=0$ ve $x=3$ noktalarındaki teğetler dik olduğundan $m_1 \cdot m_2 = -1$ dır.

$f'(0) \cdot f'(3) = -1$ olur.

$g(x) = (f \circ f)(x) \Rightarrow g'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

$x=0$ için $g'(0) = f'(\underbrace{f(0)}_{3}) \cdot f'(0)$

$= \underbrace{f'(3) \cdot f'(0)}_{-1}$

3. $f(x) = x - x^2 + |2x - a|$

$x = \frac{a}{2}$ için türev yok.

fonksiyonu veriliyor.

$x > \frac{a}{2} \Rightarrow f(x) = x - x^2 + 2x - a$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - 2x + 2 = 1 \Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow 1 > \frac{a}{2} \Rightarrow 2 > a$

$x < \frac{a}{2} \Rightarrow f(x) = x - x^2 - 2x + a$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - 2x - 2 = 1 \Rightarrow x = -1$ $\quad -1 < \frac{a}{2}$

$\Rightarrow -2 < a$

$-2 < a < 2$ $\quad a \in \{-1, 0, 1\}$

3 farklı tamsayı değeri alır.

4. $y = x^3 - x$ eğrisinin,

- $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ apsisli noktasındaki teğeti d_1,
- orijindeki teğeti d_2,
- $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ apsisli noktasındaki teğeti d_3,

I. $d_1 \perp d_2$

II. d_3, eğrinin yerel minimum noktasından geçer.

III. d_1, d_2 ve d_3 arasındaki kapalı bölge ikizkenar dik üçgendir.

$y' = 3x^2 - 1$ $\quad 3x^2 - 1 = 0$ $\quad x = \mp \frac{1}{\sqrt{3}}$

x		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$	
f'(x)	+		−		+

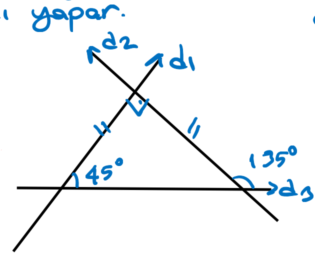
Yerel min nokta.

$\underbrace{y'\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 1}_{m_1}$, $\underbrace{y'(0) = -1}_{m_2}$, $\underbrace{y'\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0}_{m_3}$

x ekseni ile pozitif yönlü 45° lik açı yapar.

x ekseni ile pozitif yönlü 135° lik açı yapar.

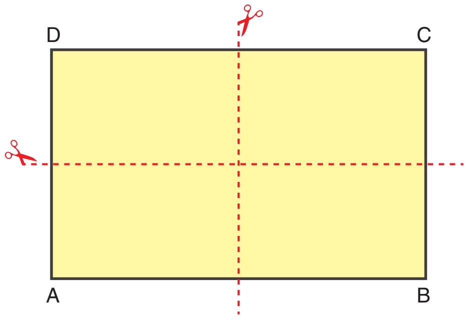
Yatay doğru. (Yerel min noktadan geçer)

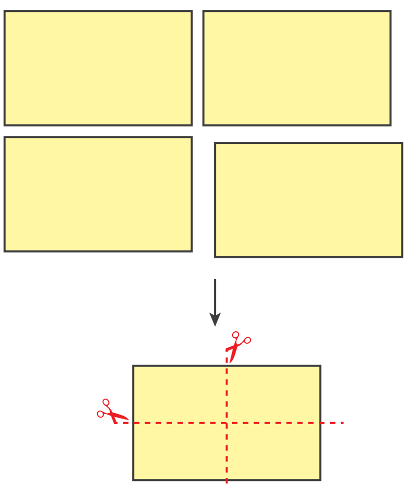


Tüm öncüller doğrudur.

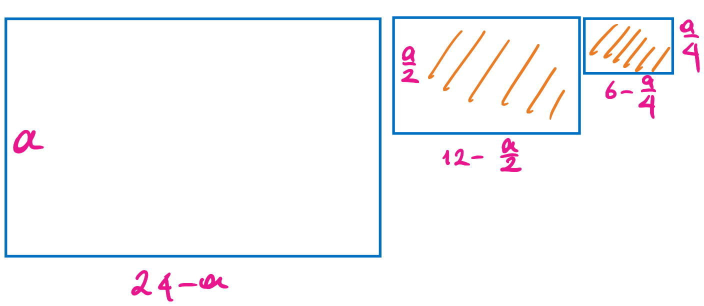
I - II - III

5. Ali Emir, çevresi 48 cm olan ABCD dikdörtgeni biçimindeki kartonu önce aşağıdaki gibi 4 eş dikdörtgen parçaya ayırıyor.





Meydana gelen 4 parçadan birini tekrar dört eş dikdörtgen parçaya bölüyor. Ali Emir, böylelikle 3 büyük ve 4 küçük olmak üzere toplam 7 parça karton elde edilmiştir.



Alanlar toplamının a cinsinden eşiti

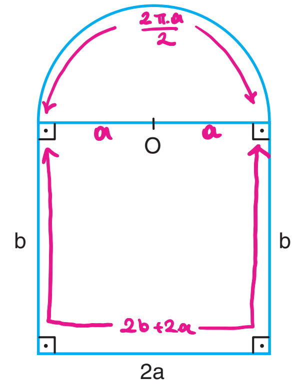
$A(a) = \frac{a}{2}\left(12-\frac{a}{2}\right) + \left(6-\frac{a}{4}\right).\frac{a}{4}$

$A(a) = 6a - \frac{a^2}{4} + \frac{3a}{2} - \frac{a^2}{16} \Rightarrow A'(a) = 6 - \frac{a}{2} + \frac{3}{2} - \frac{a}{8}$

$A'(a) = \frac{60-5a}{8} = 0 \Rightarrow a = 12$ olur.

$A(12) = 6.6 + 3.3 = 45$ olur.

6.



Yukarıdaki şeklin alt tarafı dikdörtgen üst tarafı yarım dairedir.

Çevre $\frac{2\pi.a}{2} + 2a + 2b = 12$

$\pi.a + 2a + 2b = 12$

$\Rightarrow b = \frac{12 - \pi a - 2a}{2}$

Alan $\frac{\pi.a^2}{2} + 2ab$

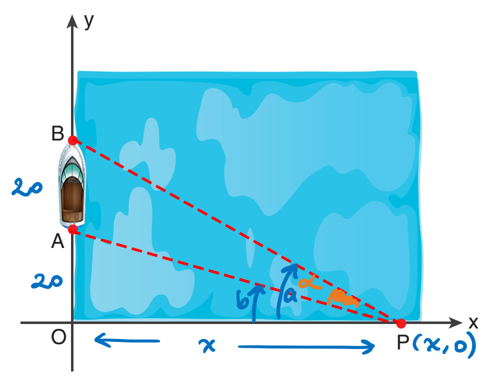
Alanın a cinsinden eşiti

$A(a) = \frac{\pi a^2}{2} + 2a\left(\frac{12-\pi a-2a}{2}\right) \Rightarrow A(a) = \frac{\pi a^2}{2} + a(12-\pi a-2a)$

$A'(a) = \pi.a + 12 - \pi a - 2a + a.(-\pi-2) = 0$

$\Rightarrow (4+\pi).a = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{\pi+4}$

7.



Dik koordinat sisteminde A, B ve P eksenler üzerindedir. x ekseni üzerindeki iskelenin P noktasında bulunan bir gözlemci A ve B noktalarına bağlı olan tekneyi gözlemlemektedir.

A(0, 20) ve B(0, 40) dır.

şekle göre $a - b = \alpha$

$\tan(a-b) = \tan\alpha$

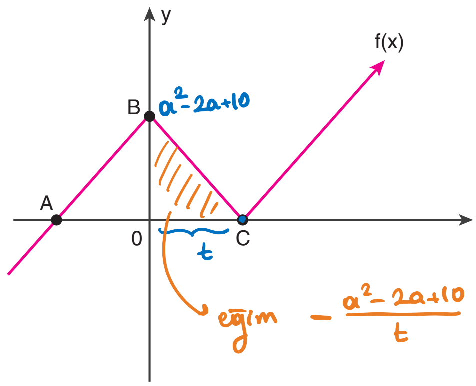
$\frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a.\tan b} = \tan\alpha$

$\frac{\frac{40}{x} - \frac{20}{x}}{1+\frac{800}{x^2}} = \tan\alpha \quad A(x) = \frac{\frac{20}{x}}{\frac{x^2+800}{x^2}}$

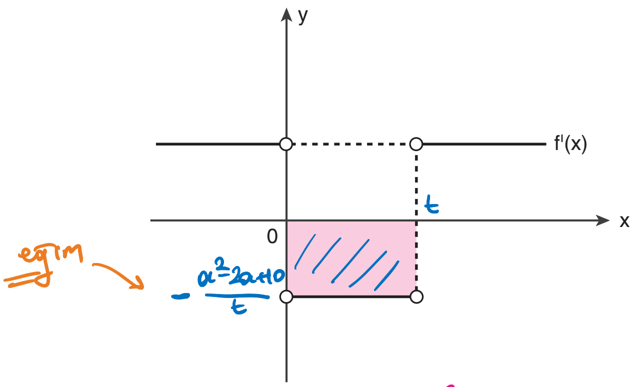
$A(x) = \frac{20x}{x^2+800} \Rightarrow A'(x) = \frac{20(x^2+800) - 40x^2}{(x^2+800)^2} = 0$

$\Rightarrow 20x^2 = 20.800 \Rightarrow x = 20\sqrt{2}$

8. Aşağıda f ve f' fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.



$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere B noktasının ordinatı $a^2 - 2a + 10$ br dir.



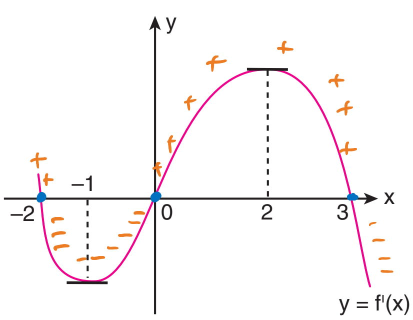
$$\text{Alan} = \frac{a^2-2a+10}{\cancel{t}} \cdot \cancel{t}$$

Alanın a cinsinden eşiti $A(a) = a^2 - 2a + 10$

$A'(a) = 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$

$A(1) = 1 - 2 + 10 = 9$ olur.

9.



Şekilde, $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

f fonksiyonunun yerel maksimum noktaları arasındaki uzaklık $\sqrt{89}$ birimdir.

x		-2		0		3	
f'(x)	+	0	−	0	+	0	−
f(x)							

$(-2, f(-2))$ $\quad$ $(3, f(3))$

$\underbrace{\hspace{4em}}_{\text{Yerel Maksimum noktaları}}$

Aralarındaki uzaklık

$\sqrt{89} = \sqrt{(-2-3)^2 + (f(3)-f(-2))^2}$

$89 = 25 + (f(3)-f(-2))^2$

$64 = (f(3)-f(-2))^2$

$8 = |f(3)-f(-2)|$

10. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere; Ali, $f(x) = x^3 + a$ fonksiyonunu yazıyor ve arkadaşı Ömer'den a yerine bir sayı yazmasını istiyor.

Ömer istediği bir sayıyı yazdıktan sonra fonksiyonun grafiğini çiziyorlar.

Eğer fonksiyon x eksenini sadece bir noktada kesiyorsa Ali, birden fazla noktada kesiyorsa oyunu Ömer kazanacaktır.

$f(x) = x^3 + a \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \geq 0$

olduğundan $f(x)$ artandır.

Gerçek sayılarda tanımlı daima artan $f(x)$ fonksiyonu x eksenini bir noktada keser.

Dolayısıyla yarışmayı her koşulda Ali kazanır.

Cevap D seçeneğidir.

11. $f(x) = 2x^3 - 9ax^2 + 12a^2x + 1$

$a > 0$ olmak üzere f(x) fonksiyonu veriliyor.

f(x) fonksiyonunun x = p ve x = q apsisli noktalarında sırasıyla yerel maksimum ve yerel minumumu vardır.

x		p		q	
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)		Yerel Maks.		Yerel Min.	

$f'(x) = 6x^2 - 18ax + 24a$

$p + q = 3a \qquad (p^2 = q)$

$p \cdot q = 4a$

$\dfrac{p+p^2}{p^3} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{1+p}{p^2} = \dfrac{3}{4}$

$3p^2 - 4p - 4 = 0$

$3p \quad +2$

$p \quad -2 \Rightarrow p = 2$

$q = 4$

$p + q = 3a$

$6 = 3a \Rightarrow a = 2$ olur.

ACİL MATEMATİK

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için,

$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$

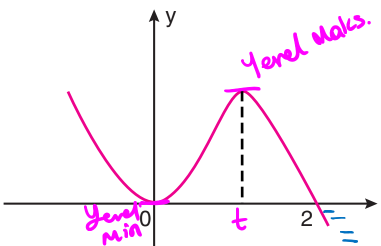
fonksiyonu tanımlanıyor.

$f(\underbrace{x.x.x \ldots x}_{20 \text{ tane}}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \ldots + f(x)}_{20 \text{ tane}}$

$f(x^{20}) = 20 \cdot f(x)$

$\dfrac{d\,(f(x^{20}))}{dx} = \dfrac{d\,(20 f(x))}{dx} = 20 \cdot f'(x)$

2. Aşağıda üçüncü dereceden f(x) polinomunun grafiği verilmiştir.



Grafiğe göre $a<0$ olmak üzere

$f(x) = a \cdot x^2 (x-2)$ olmalı

$f(x) = a(x^3 - 2x^2) \Rightarrow f'(x) = a(3x^2 - 4x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ veya $x = \frac{4}{3}$

x		0		$\frac{4}{3}$	
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$

Yerel Max noktanın apsisi $\frac{4}{3}$ tür.

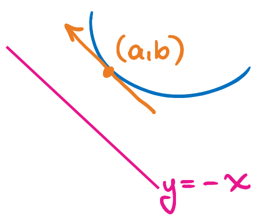
PRATİK YOL: Üçüncü derece fonksiyonlar için köklerin aritmetik ortalaması ekstremumların aritmetik ortalamasına eşit $\frac{0+0+2}{3} = \frac{0+t}{2} \Rightarrow t = \frac{4}{3}$

3. $f : (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ olmak üzere,

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

fonksiyonunu veriliyor.

Temsili çizim



f(x) in $y=-x$ doğrusuna en yakın noktası (a,b) de çizilen teğet paraleldir.

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow \dfrac{-2}{(a-1)^2} = -1$

$\Rightarrow (a-1)^2 = 2 \Rightarrow a = 1-\sqrt{2}$

$a = 1+\sqrt{2} \in (1,\infty)$

4. Yarıçapı r birim olan bir kürenin hacmi, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ve yüzey alanı, $S = 4\pi r^2$ formülü ile bulunur.

Şişirilen bir balonun ulaştığı alan ve hacim değerleri sürekli not edilmektedir. Herhangi bir anda alan a br^2 ve hacim b br^3 tür.

$\left.\begin{array}{l} a(r) = 4\pi r^2 \\ b(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{array}\right\} \Rightarrow (a-b)(r) = 4\pi r^2 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$(a-b)'(r) = 8\pi r - 4\pi r^2 = 0$

$= 4\pi r(2-r) = 0$

$r=0 \quad r=2$

$4\pi r^2 - \frac{4\pi r^3}{3} = 0$

r		0		2	
$(a-b)'(r)$	$-$		$+$		$-$
$(a-b)(r)$					

r		0		3	
$(a-b)(r)$	$+$		$+$		$-$

$0<r<2$ için a-b artar

$2<r<3$ için a-b azalır

$0<r<3$ için $a-b>0$

$r>3$ için $a-b<0 \Rightarrow a<b$

$r=2$ için a-b en büyük değeri alır. Yanlış Seçenek E dir.

5. Hilmi, bir kartondan keseceği parçalarla belli bir sabit hacimde dik silindir biçiminde bir kutu yapacaktır. Hilmi, kartondan, kutunun tabanları için iki daire ve yan yüzey için bir dikdörtgen kesecektir.

Hacmi sabit V olsun.

$V = \pi r^2 . h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

Yüzey alanı $S = 2.\pi r^2 + 2\pi r.h$

yüzey alanının r cinsinden eşiti

$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r.\dfrac{V}{\pi r^2}$

$S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r} \Rightarrow S'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0$

$\Rightarrow 4\pi r^3 = 2V$

$2\pi r^3 = V$

$2\pi r^3 = \pi r^2 . h$

$\Rightarrow 2r = h$

çap = yükseklik

Cevap D seçeneği.

AÇIL MATEMATİK

6. I. $f(x) = x^2 + x + 1$

II. $g(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x$

III. $h(x) = x^5 - 1$

I. $f(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2$

x		$-1/2$	
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘		↗

daima artan diyemeyiz.

II. $g(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x \Rightarrow g'(x) = 4x^2 - 4x + 1$

$g'(x) = (2x-1)^2 = 0$

x		$1/2$	
g'(x)	+	‖	+
g(x)	↗		↗

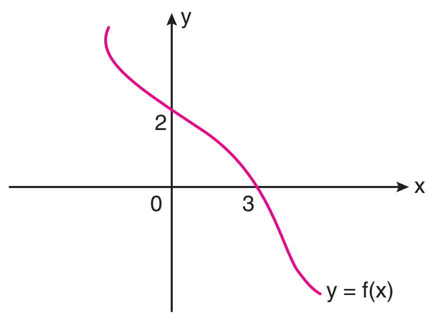
daima artan.

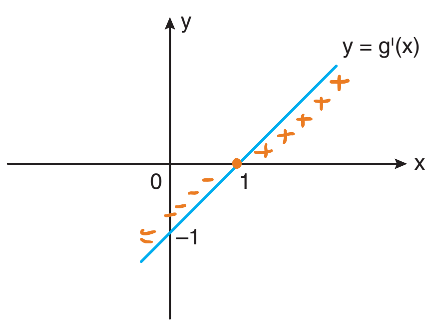
III. $h(x) = x^5 - 1 \Rightarrow h'(x) = 5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

x		0	
h'(x)	+	‖	+
h(x)	↗		↗

daima artan.

7.





Yukarıda, y = f(x) ve y = g'(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

I. $(x - 5) \cdot f'(x) \cdot g'(x) < 0$

$x = 5$ f azalan olduğundan $f'(x) < 0$ $x = 1$

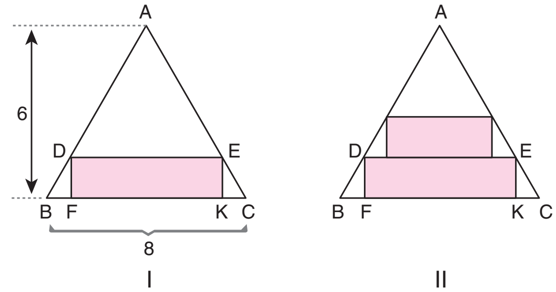
x		1		5	
I	−	0	+	0	−

Çözüm aralığındaki tamsayılar

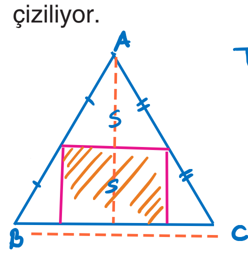
$\ldots, -2, -1, 0, 6, 7, 8, \ldots$

$6 + 7 = 13$

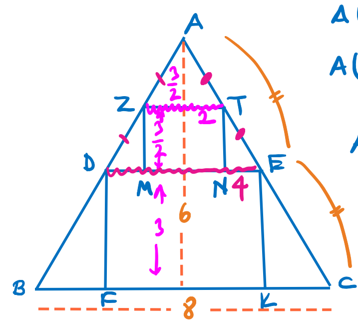
8.



ABC üçgeninin yüksekliği 6 br ve taban uzunluğu 8 br dir. ABC üçgeninin tabanına alanı maksimum olan DEKF dikdörtgeni yerleştiriliyor. Sonrasında oluşan ADE üçgeninin tabanına yine alanı maksimum olan başka bir dikdörtgen çiziliyor.



Tabanı ve yüksekliği belli olan üçgenin içine çizilebilecek en büyük hacimli dikdörtgenin alanı üçgenin alanının yarısıdır.



$A(DFKE) = 4 \cdot 3 = 12$

$A(MNTZ) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

$A(DFKE) + A(MNTZ) = 12 + 3 = 15$

9. a bir gerçek sayı olmak üzere,

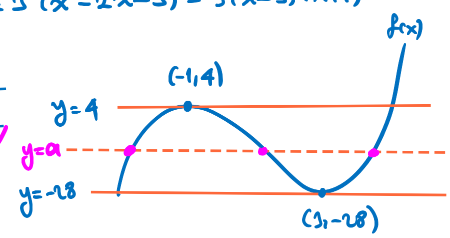
$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1)$

x		−1		3	
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	↗		↘		↗

$f(-1) = 4$

$f(3) = -28$



$-28 < a < 4$

10. a ve b birer pozitif tam sayıdır. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x^5 + ax + b$ fonksiyonu için.

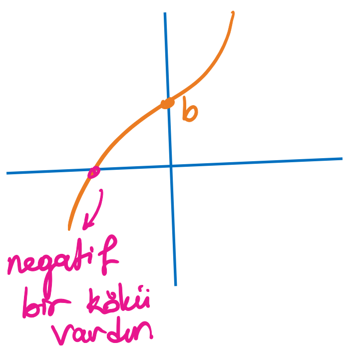
I. 3 tane gerçek kökü vardır.

II. 1 tane negatif kökü vardır.

III. Fonksiyonun tersi vardır.

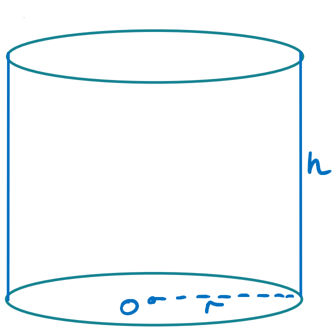
$f(x) = x^5 + ax + b \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + a$

$a > 0$ olduğundan $f'(x) > 0$ olur. Daima artan fonksiyondur. Gerçek sayılarda tanımlı daima artan bir fonksiyon bire bir ve örtendir dolayısıyla tersi vardır. x eksenini tek noktada keser. $x=0$ $f(0)=b$



Cevap II ve III tür.

11. Bir süt fabrikası üstü açık dik dairesel silindir şeklinde 90 cm^3 hacimli aliminyum kutu yapacaktır.



$\pi r^2 \cdot h = 90 \Rightarrow h = \frac{90}{\pi r^2}$

Yanal Alan $= 2\pi r . h$

Taban Alanı $= \pi r^2$

Toplam yüzey alanının r cinsinden eşiti

$S(r) = \pi r^2 + \frac{180}{r} \Rightarrow S'(r) = 2\pi r - \frac{180}{r^2} = 0$

$\Rightarrow \pi r^3 = 90$

$\Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{90}{\pi}}$

12. $x \neq 0$ olmak üzere,

$$\underbrace{x + x + x + \ldots + x}_{x \text{ tane}} = x^2$$

Yukarıda verilen eşitlikte her iki tarafın türevi alınırsa,

$$1 + 1 + 1 + \ldots 1 = 2x$$

$$x = 2x$$

sonucuna ulaşılır.

I. $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{100 \text{ tane}} = 100 \cdot x$

II. $\underbrace{2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{x \text{ tane}} = 2x$

III. $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{10 \text{ tane}} = x^{10}$

I. $\underbrace{x + x + \ldots + x}_{100 \text{ tane}} = 100 . x$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{100 \text{ tane}} = 100$

$100 = 100$ ✓

II. $\underbrace{2 + 2 + 2 + \ldots + 2}_{x \text{ tane}} = 2x$ eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$\underbrace{0 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{x \text{ tane}} = 2$

$0 = 2$ ✗

III. $\underbrace{x . x . x \ldots x}_{10 \text{ tane}} = x^{10}$ her iki tarafın türevi alınırsa (Çarpımın türevi)

$\underbrace{\underbrace{(1.x.x \ldots x)}_{x^9} + \underbrace{(x.1.x \ldots x)}_{x^9} + \ldots \ldots + \underbrace{(x.x \ldots x.1)}_{x^9}}_{10 \text{ tane}} = 10.x^9$

$10.x^9 = 10.x^9$ ✓

Yalnız I Cevap B