BAĞIMLI VE BAĞIMSIZ OLAYLARIN TESPİTİ

İki olaydan herhangi birinin olasılığı diğer olayın gerçekleşmesine bağlı olarak değişmiyorsa bu iki olaya **bağımsız olaylar**, değişiyorsa **bağımlı olaylar** denir.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ olur.

	Olasılık Cümlesi	A Olayı	B Olayı	Bağımlı Olay	Bağımsız Olay
I.	Bir okulda yapılan bilgi yarışmasında 20 öğrenci yarışmaktadır. Öğrencilerden Ayşe'nin yarışmayı kazanma olasılığı $\frac{1}{4}$, Fatma'nın kazanma olasılığı ise $\frac{1}{5}$ olarak hesaplanmıştır. **Buna göre, Ayşe'nin kazanıp Fatma'nın kazanmama olasılığı kaçtır?**				
II.	Bir kutuda 6 mavi ve 4 beyaz bilye vardır. Bilyeler geriye koymadan rastgele çekilmektedir. **Buna göre; ilk çekilen bilyenin mavi, ikinci çekilen bilyenin beyaz olma olasılığı kaçtır?**				
III.	Bir okul kütüphanesinde 8 hikaye kitabı ve 7 roman bulunmaktadır. Öğrenciler bu kitaplardan geriye koymadan rastgele kitap seçecektir. **Buna göre; ilk çekilen kitabın hikaye kitabı, ikinci çekilen kitabın roman olma olasılığı kaçtır?**				

I. **A olayı:** Ayşe'nin yarışmayı kazanması,
B olayı: Fatma'nın yarışmayı kazanmaması.
(Bağımsız Olay)

II. **A olayı:** İlk çekilen bilyenin mavi olması,
B olayı: İkinci çekilen bilyenin beyaz olması.
(Bağımlı Olay)

III. **A olayı:** İlk çekilen kitabın hikaye kitabı olması.
B olayı: İkinci çekilen kitabın roman olması.
(Bağımlı Olay)

BAYES TEOREMİ

Bayes Teoremi: bir olayın gerçekleşme olasılığını, mevcut diğer bilgilere dayanarak güncellememizi sağlayan önemli bir olasılık kuralıdır.

Bayes teoreminin matematiksel ifadesi şu şekildedir;

$$P(A\backslash B) = \frac{P(B \backslash A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Bu formülde kullanılan semboller:

- P(A): A olayının gerçekleşme olasılığı.
- P(B): B olayının gerçekleşme olasılığı.
- P(A\B): B olayının gerçekleştiği bilindiğine göre, A olayının gerçekleşme olasılığı.
- P(B\A): A olayının gerçekleştiği durumda B olayının gerçekleşme olasılığı.

Örnek 1

Bir toplulukta bulunan 100 kişinin cinsiyetleri ve gözlük kullanma sayıları ile ilgili bilgiler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Gözlüklü	Gözlüksüz
Erkek	5	35
Kadın	20	40

Topluluktan seçilen bir kişinin gözlüklü olduğu bilindiğine göre, erkek olma olasılığını Bayes Teoremi ile bulalım.

Çözüm

$$P(\text{Erkek}|\text{Gözlüklü}) = \frac{P(\text{Erkek}) \cdot P(\text{Gözlüklü}|\text{Erkek})}{P(\text{Gözlüklü})}$$

$$= \frac{\frac{40}{100} \cdot \frac{5}{40}}{\frac{25}{100}} = \frac{1}{5}$$

Örnek 2

Bir okulda, öğrencilerin %12'sine bire bir rehberlik desteği verilmektedir. Genel olarak, okulun öğrencilerinin %6'sı sınav kaygısı yaşamaktadır. Rehberlik desteği verilen öğrencilerin %10'u sınav kaygısı yaşamaktadır.

Eğer bir öğrencinin sınav kaygısı yaşadığı biliniyorsa, bu öğrencinin rehberlik desteği almış olma olasılığı kaçtır?

Çözüm

- Rehberlik desteği alan öğrencilerin oranı: $P(A) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$
- Sınav kaygısı yaşayan öğrencilerin oranı: $P(B) = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$
- Rehberlik desteği alan öğrenciler arasında sınav kaygısı yaşayanların oranı: $P(B \backslash A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$
- Sınav kaygısı yaşadığı bilinen bir öğrencinin rehberlik desteği almış olma olasılığı P(A\B) olmak üzere;
  Bayes Teoremi:

$$P(A \backslash B) = \frac{P(B \backslash A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

$$P(A \backslash B) = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{25}}{\frac{3}{50}} = \frac{3}{250} \cdot \frac{50}{3} = \frac{1}{5}$$

%20'dir.

BAYES TEOREMİ

Örnek 3

Bir öğrenci her gün evinden okuluna yürüyerek gitmektedir.

Bu öğrencinin;

- Yağmur yağmayan bir günde okula geç gitme olasılığı $\frac{1}{5}$'tir.
- Yağmur yağdığı bir günde okula geç gitme olasılığı $\frac{2}{3}$'tür.
- Herhangi bir günde yağmur yağma olasılığı $\frac{1}{4}$'tür.

Buna göre, öğrencinin okula geç gittiği bir günde yağmur yağma olasılığı kaçtır?

Çözüm

- $P(Y) = \frac{1}{4}$: Yağmur yağma olasılığı
- $P(Y^I) = \frac{3}{4}$: Yağmur yağmama olasılığı
- $P(G\backslash Y) = \frac{2}{3}$: Yağmur yağdığı bir günde geç kalma olasılığı
- $P(G\backslash Y^I) = \frac{1}{5}$: Yağmur yağmadığı bir günde geç kalma olasılığı

İstenen:

Öğrencinin geç kaldığı bir günde yapmur yağmış olma olasılığı yani; $P(Y\backslash G)$ dir.

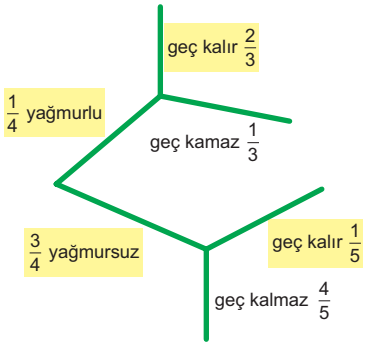
Bayes Teoremi:

$$P(Y\backslash G) = \frac{P(G\backslash Y)\cdot P(Y)}{P(G)}$$

Ama önce P(G) yi yani geç kalma olasılığını bulmamız gerekiyor.

Geç kalma iki durumdan kaynaklanabilir.

- Yağmur yağar ve geç kalır.
- Yağmur yağmaz ama yine de geç kalır.



$$P(G) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{19}{60}$$

$$P(Y\backslash G) = \frac{P(G\backslash Y)\cdot P(Y)}{P(G)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{19}{60}} = \frac{2}{12}\cdot\frac{60}{19} = \frac{10}{19}$$

Yani öğrenci geç kaldığı bir gün, yağmur yağmış olma olasılığı $\frac{10}{19}$ olur.