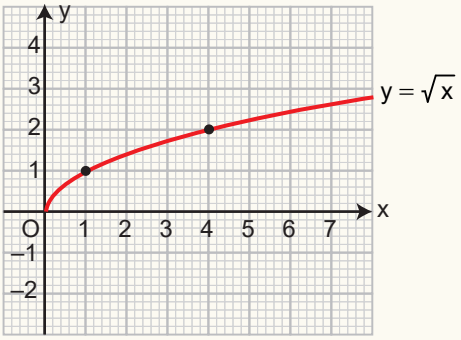
Karekök Referans Fonksiyonundan Türetilen $(g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0))$ Karekök Fonksiyonlarının Nitel Özellikleri

Değer kümesi $\mathbb{R}$ olan, $f(x) = \sqrt{x}$ ile modellenen f fonksiyonu karekök referans fonksiyonu olarak adlandırılır.



Karekök referans fonksiyonun tanım kümesi

T.K = $[0, \infty)$

Karekök referans fonksiyonun görüntü kümesi

G.K = $[0, \infty)$

Karekök referans fonksiyonun sıfırı

$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$'dır

Karekök referans fonksiyonun işareti

x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
f(x)	Tanımsız	0	Pozitif

Karekök referans fonksiyonun artan - azalan olduğu aralıklar

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, $x_1 < x_2$ iken $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ olduğundan f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artandır.

Karekök referans fonksiyonunun maksimum - minimum noktaları

Minimum noktası (0, 0) olup maksimum noktası yoktur.

Karekök referans fonksiyonun bire birliği

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ için $x_1 \neq x_2$ iken $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ olduğundan f fonksiyonu bire birdir.

Ayrıca yatay doğru testine göre de bire bir olduğu görülür.

Karekök referans fonksiyonunun örtenliği

Karekök referans fonksiyonun örten olması için değer kümesi ile görüntü kümesinin birbirine eşit olması gerekir.

D.K = $\mathbb{R}$ D.K = Değer kümesi

G.K = $[0, \infty)$ G.K = Görüntü kümesi

D.K $\neq$ G.K olduğundan örten değildir.

Karekök referans fonksiyonun tekliği - çiftliği

Karekök referans fonksiyonun teklik veya çiftliğinden bahsedilemez. Çünkü fonksiyon negatif x değerleri için tanımlı değildir.
($f(-x) = f(x)$ ya da $f(-x) = -f(x)$ eşitliği elde edilemez.)

Etkinlik 1

$f: [0, 16] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu veriliyor.

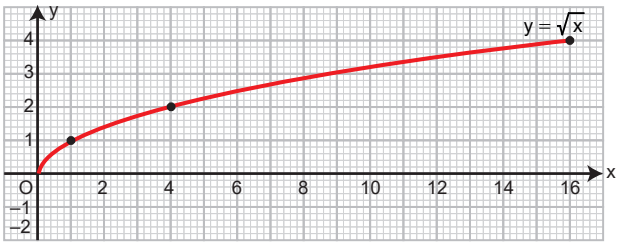
Buna göre f fonksiyonunun

a. Tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

T.K = [0, 16]

G.K = [0, 4]

b. Grafiğini çiziniz.



c. Bire bir ve örtenliğini inceleyiniz.

Birebirdir.

Örten değildir.

d. Artan - azalanlığını inceleyiniz.

[0, 16] aralığında f artandır.

e. Maksimum ve minimum değerini bulunuz.

Maksimum değeri 4

Minimum değeri 0'dır.

Karekök Referans Fonksiyonundan Türetilen ($g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ ($a, r, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)) Karekök Fonksiyonlarının Nitel Özellikleri

1. Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi	Tanım ve Görüntü Kümesi	İşareti	Azalan-Artan olduğu aralık	Maksimum-Minumum Noktası	Eksenleri Kestiği Noktalar	BireBirlik ve Örtenlik	Tekliği-Çiftliği
$f(x) = 2\sqrt{x-1} + 4$	Tanım Kümesi	Pozitif	Artan	Maksimum	x Ekseni (Sıfırları)	Bire Birliği	
	Görüntü Kümesi	Negatif	Azalan	Minimum	y Ekseni	Örtenliği	

Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi	Tanım ve Görüntü Kümesi	İşareti	Azalan-Artan olduğu aralık	Maksimum-Minumum Noktası	Eksenleri Kestiği Noktalar	BireBirlik ve Örtenlik	Tekliği-Çiftliği
$f(x) = 2\sqrt{x-1} + 4$	Tanım Kümesi	Pozitif	Artan	Maksimum	x Ekseni (Sıfırları)	Bire Birliği	Ne tek Ne çift
	$[1, \infty)$	$[1, \infty)$	$[1, \infty)$	Yok	Yok	Evet	
	Görüntü Kümesi	Negatif	Azalan	Minimum	y Ekseni	Örtenliği	
	$[4, \infty)$	–	–	$(1, 4)$	Yok	Hayır	

2. Aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

f(x)	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$-4\sqrt{x}$		
$3 \cdot \sqrt{x-2}$		
$\sqrt{x} - 5$		
$\sqrt{x-1} + 3$		
$-2 \cdot \sqrt{x+2} - 6$		

f(x)	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$-4\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$(-\infty, 0]$
$3 \cdot \sqrt{x-2}$	$[2, \infty)$	$[0, \infty)$
$\sqrt{x} - 5$	$[0, \infty)$	$[-5, \infty)$
$\sqrt{x-1} + 3$	$[1, \infty)$	$[3, \infty)$
$-2 \cdot \sqrt{x+2} - 6$	$[-2, \infty)$	$(-\infty, -6]$

3. Tanım kümesi $[-4, 5]$ olan

$$f(x) = \sqrt{x+4} - 2$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f fonksiyonunun

a. Görüntü kümesini bulunuz. $f(-4) = -2$, $f(5) = 1$

b. Fonksiyonun artan olduğu en geniş aralığı bulunuz.

$x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

c. Fonksiyonun maksimum - minimum değerlerini bulunuz. $-2 \rightarrow$ minimum, $1 \rightarrow$ maksimum

d. Fonksiyonun sıfırlarını bulunuz.

a) $[-2, 1]$ b) $[-4, \infty)$ aralığında artan

c) Makismum:1 Minimum: –2 d) $x = 0$

$\sqrt{x+4} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x+4} = 2 \Rightarrow x + 4 = 4$

$x = 0$

4. Değer kümesi $\mathbb{R}$ olan

$$f(x) = -2 \cdot \sqrt{x+2} - 1$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. f fonksiyonunun tanım kümesi $[-2, \infty)$'dur. ✓

II. f fonksiyonunun görüntü kümesi $(-\infty, -1]$'dir. ✓

III. f fonksiyonunun minimum değeri -2'dir. ✗

ifadelerinden hangileri doğrudur?

I-II

maksimum değeri -1 dir.
minimum değeri yoktur.

5. $a, r, k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$$

fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- g fonksiyonunun tanım kümesi $[2, \infty)$'dur. $r = -2$
- g fonksiyonunun alabileceği en büyük değer 6'dır. $k = 6$
- g fonksiyonunun sıfırı 6'dır.

Buna göre, $a + r + k$ toplamı kaçtır?

1

$g(x) = a \cdot \sqrt{x-2} + 6$

$x = 6$ için $a \cdot \sqrt{4} + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6$

$a = -3$

$a + r + k = -3 - 2 + 6 = 1$

Performans Değerlendirme

1. Ses hızının sıcaklığa bağlı olarak nasıl değiştiğini gösteren fonksiyon aşağıdaki gibidir.

$$v(T) = 20 \cdot \sqrt{T + 273}$$

Burada

- v(T): Sesin hızı (m/s cinsinden)
- T: Sıcaklık (Santigrat derece cinsinden)

Buna göre,

I. v fonksiyonu bire birdir.

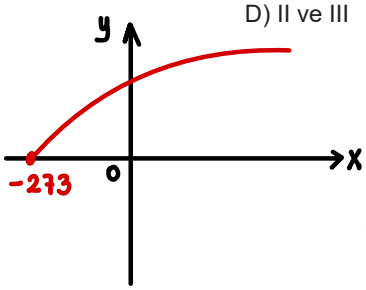
II. v fonksiyonu $[-273, \infty]$ aralığında artandır.

III. v fonksiyonunun görüntü kümesi $[0, \infty)$'dur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

EEE

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II D) II ve III E) I, II ve III



- T.K = $[-273, \infty)$
  G.K = $[0, \infty)$
- $[-273, \infty)$ artandır.
- Yatay doğru testine göre bire birdir.

2. $f(x) = -\sqrt{x + 5} + 8$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre;

I. f fonksiyonunun görüntü kümesi $(-\infty, 8]$'dir.

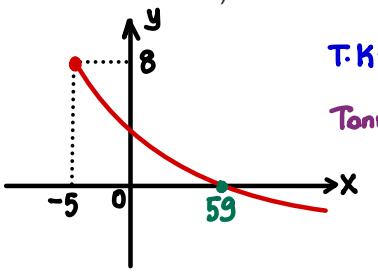
II. f fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık $[-5, \infty)$'dur.

III. f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktanın apsisi 59'dur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

EEE

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II D) II ve III E) I, II ve III



T.K = $[-5, \infty)$ G.K = $(-\infty, 8]$

Tanımlı olduğu aralıkta azalan

$-\sqrt{x+5} + 8 = 0$

$\sqrt{x+5} = 8$

$x + 5 = 64 \Rightarrow x = 59$

3. Tanımlı olduğu aralıkta

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x + 7} - 2$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre;

I. f fonksiyonunun azalan olduğu aralık yoktur.

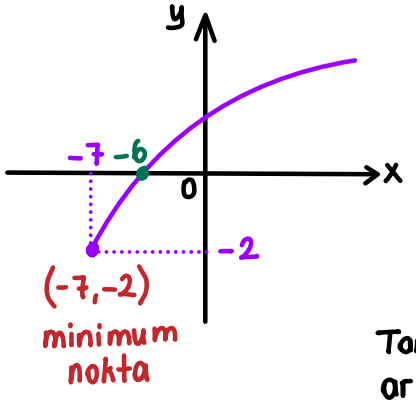
II. f fonksiyonunun minimum noktası $(-7, -2)$'dir.

III. $(-6, \infty)$ aralığında $f(x) > 0$'dır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

EEE

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II D) II ve III E) I, II ve III



$2\sqrt{x+7} - 2 = 0$

$\sqrt{x+7} = 1$

$x = -6$

$[-7, -6)$ $f(x) < 0$

$(-6, \infty)$ $f(x) > 0$

Tanımlı olduğu aralıkta artandır.

4. $f: [6, \infty) \to [1, \infty)$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x - 6} + 1$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre;

I. f fonksiyonu örtendir.

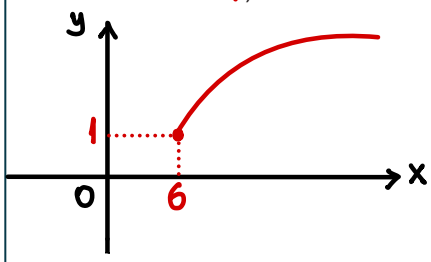
II. f fonksiyonunun maksimum noktası (6, 1)'dir.

III. fonksiyonunun sıfırı yoktur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

DDD

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II D) I ve III E) II ve III



G.K = $[1, \infty)$

D.K = $[1, \infty)$

D.K = G.K örtendir.

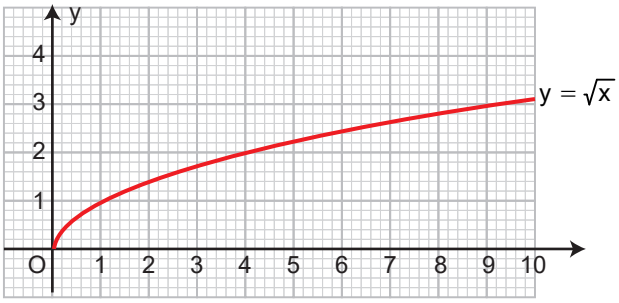
(6,1) minimum nokta maksimumu yoktur.

Sıfırı yoktur.

ACİL MATEMATİK

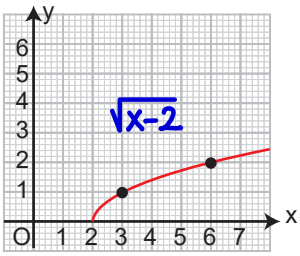
Performans Değerlendirme

5. Aşağıda karekök referans fonksiyonun grafiği verilmiştir.

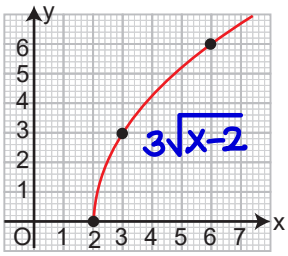


Buna göre,

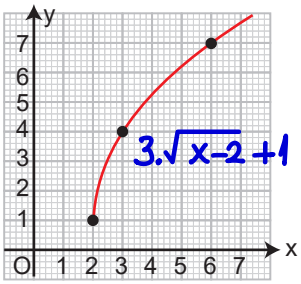
I.



II.



III.

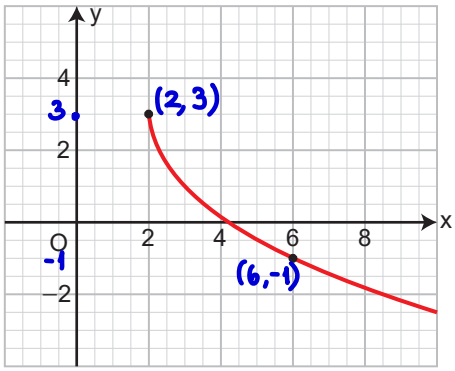


grafiklerinin cebirsel temsilleri sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

BBB

	I	II	III
A)	$\sqrt{x+2}$	$3\sqrt{x+2}$	$3\sqrt{x+2}-1$
B)	$\sqrt{x-2}$	$3\sqrt{x-2}$	$3\sqrt{x-2}+1$
C)	$\sqrt{x-2}$	$2\sqrt{x-3}$	$3\sqrt{x-3}-1$
D)	$2\sqrt{x}$	$2\sqrt{x-1}$	$2\sqrt{x-1}+1$
E)	$2\sqrt{x-2}$	$\sqrt{x}-2$	$2\sqrt{x-2}+1$

6. Aşağıda $f(x) = a \cdot \sqrt{x-r} + k$ karekök fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun sıfırı kaçtır?

AAA

A) $\frac{17}{4}$ B) $\frac{38}{8}$ C) $\frac{9}{2}$ D) $\frac{37}{8}$ E) $\frac{19}{4}$

$f(x) = a.\sqrt{x-2} + 3$

$f(6) = a\sqrt{4} + 3 = -1$

$2a = -4$

$a = -2$

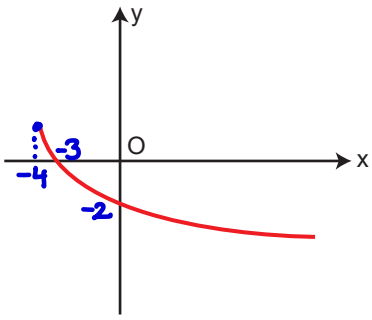
$-2\sqrt{x-2} + 3 = 0$

$\sqrt{x-2} = \frac{3}{2}$

$x - 2 = \frac{9}{4}$

$x = \frac{17}{4}$

7. Aşağıda karekök referans fonksiyonundan türetilen bir f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



- f fonksiyonu [–4, –3) aralığında pozitif değerler almaktadır.
- f fonksiyonunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı –2'dir.

Buna göre, f fonksiyonunun grafiği aşağıda verilen noktaların hangisinden geçer?

DDD

A) (6, –2) B) (4, –1) C) (11, –3) D) (12, –6) E) (21, –7)

$f(x) = a.\sqrt{x+4} + k \rightarrow f(x) = -2\sqrt{x+4} + 2$

$-/ f(-3) = a.1 + k = 0$

$+ f(0) = a.2 + k = -2$

$a = -2,\ k = 2$

$f(12) = -2\sqrt{16} + 2$

$= -8 + 2$

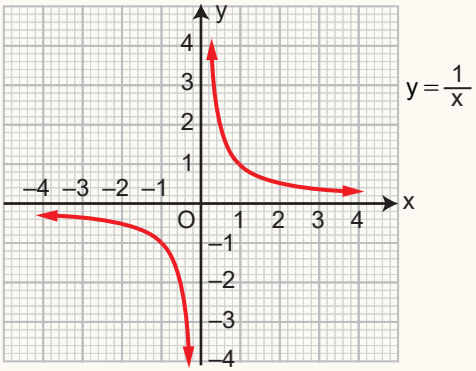
$= -6$

AÇIL MATEMATİK

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

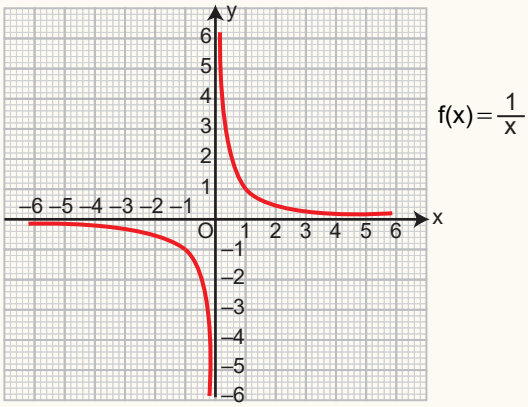
Rasyonel referans fonksiyon

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ aralığında tanımlı $f(x) = \frac{1}{x}$ ile modellenen f fonksiyonu rasyonel referans fonksiyonu olarak adlandırılır.



Rasyonel referans fonksiyonu sıfırdan farklı her gerçek sayıyı çarpmaya göre tersine çevirir. "$\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve a ile b aynı işaretli olmak üzere $a < b \to \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur"

- $2 < x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}$
- $-5 \leq x < -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \leq -\frac{1}{5}$
- $x > 3 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$
- $x < -6 \Rightarrow -\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < 0$
- $-2 \leq x < 4 \Rightarrow -\infty < x \leq \frac{-1}{2} \cup \frac{1}{4} < x < \infty$
- $0 < x < 6 \Rightarrow \frac{1}{6} < x < \infty$



$0 < x < \infty$ aralığında ve $-\infty < x < 0$ aralığında rasyonel referans fonksiyonunun değişimini inceleyelim.

- $(0, \infty)$ aralığında

  $1/0{,}01 = 100$

  $1/0{,}001 = 1000$

  $1/0{,}000000001 = 1000000000$

Paydadaki sayı sıfıra yaklaştıkça sayının değeri büyüyüp artı sonsuza yaklaşır.

- $(-\infty, 0)$ aralığında

  $1/-0{,}01 = -100$

  $1/-0{,}001 = -1000$

  $1/-0{,}000000001 = -1000000000$

Paydadaki sayı sıfıra yaklaştıkça sayının değeri küçülüp eksi sonsuza yaklaşır.

RASYONEL REFERANS FONKSİYONUNUN NİTEL ÖZELLİKLERİ

$f(x) = \frac{1}{x}$ olmak üzere,

- f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$'dır. Yada $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ olarak ifade edilir.
- f fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$'dır. Yada $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ olarak ifade edilir.
- f fonksiyonu $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ aralığında azalan fonksiyondur.
- f fonksiyonunun maksimum ve minimum değeri yoktur.
- f fonksiyonunun sıfırı yoktur.
- f fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığında negatif değerler alırken $(0, \infty)$ aralığında pozitif değerler alır.
- $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere,

  $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

  olduğundan f bire bir fonksiyondur.
- f fonksiyonunun değer kümesi $\mathbb{R}$ ve ve görüntü kümesi $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$'dir. D.K $\neq$ G.K olduğundan f fonksiyonu örten değildir.
- $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için

  $$f(x) = \frac{1}{x} \text{ ise } f(-x) = \frac{-1}{x} = -f(x)$$

  olduğundan (grafik orijine göre simetrik) f fonksiyonu tek fonksiyondur.

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Örnek

$f: \left[\frac{1}{2}, 5\right] \to \left[\frac{1}{5}, 2\right]$

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre f fonksiyonunun

a. Görüntü kümesini bulunuz.

b. En büyük ve en küçük değerini bulunuz.

c. Bire birliğini inceleyiniz.

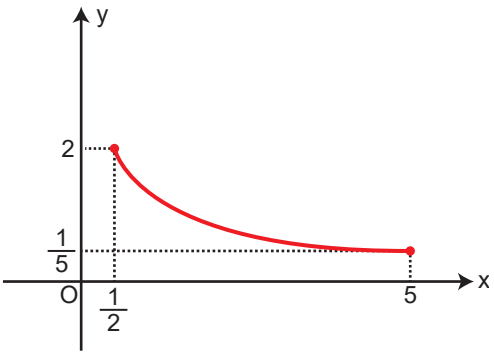
d. Örtenliğini inceleyiniz.

e. Artan-azalanlığını inceleyiniz.

a. Tanım kümesi $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$ olduğundan $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$

$\Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq 2$ olduğundan f fonksiyonunun görüntü kümesi G.k $= \left[\frac{1}{5}, 2\right]$'dir.

b.



f fonksiyonunun G.K $= \left[\frac{1}{5}, 2\right]$ olduğundan

f fonksiyonunun en küçük değeri $\frac{1}{5}$ en büyük değeri 2 olur.

c. $\forall x_1, x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 5\right]$ için, $x_1 \neq x_2$ iken $\left(\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}\right)$

$\Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$ olduğundan f fonksiyonu bire birdir.

d. f fonksiyonunun değer kümesi ile görüntü kümesi birbirine eşit olduğundan f örtendir.

e. f fonksiyonunun artan olduğu bir aralık olmayıp azalan olduğu en geniş aralık $\left[\frac{1}{2}, 5\right]$'dir.

1. $x \in \left[\frac{-1}{5}, 4\right] - \{0\}$ **olmak üzere,** $f(x) = \frac{1}{x}$ **fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.**

$(-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

$-\frac{1}{5} \leq x < 0 \quad \cup \quad 0 < x \leq 4$

$-\infty < \frac{1}{x} \leq -5 \quad \cup \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} < \infty$

$(-\infty, -5] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

2. $x \in \left(\frac{1}{6}, 2\right]$ **olmak üzere,** $f(x) = \frac{1}{x}$ **fonksiyonunun bu aralıkta alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?**

15

$\frac{1}{6} < x \leq 2$

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} < 6$

$1+2+3+4+5=15$

3. a bir pozitif tam sayıdır.

$x \in \left[\frac{1}{a}, \frac{2}{9}\right)$, $f(x) = \frac{1}{x}$ **fonksiyonunun alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı 26 olduğuna göre, a kaçtır?**

8

$\frac{1}{a} \leq x < \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{9}{2} < \frac{1}{x} \leq a$

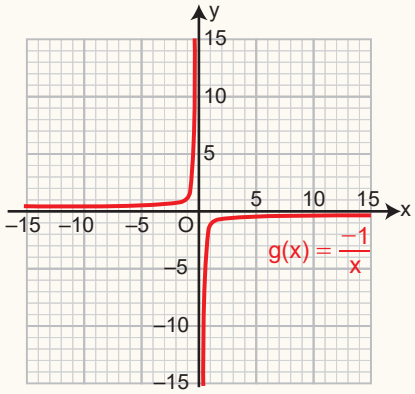
$5+6+7+8 = 26$

$a = 8$

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

x eksenine göre yansıma

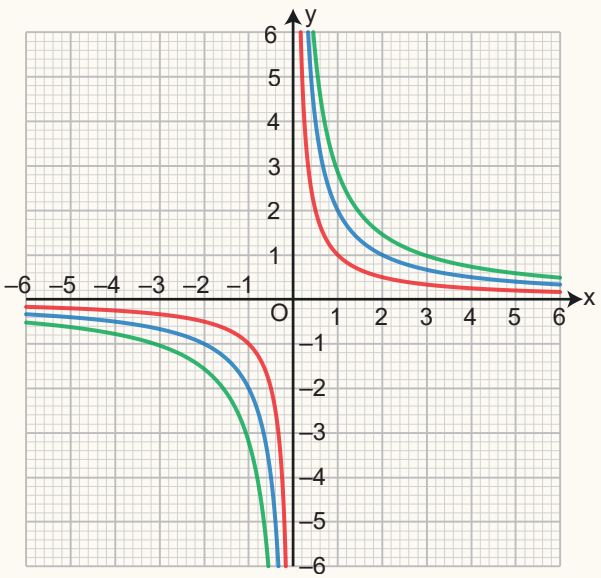
f. $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R})$ fonksiyonunda $a = -1$ ise $g(x) = \frac{-1}{x}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre uygulanan dönüşüm x eksenine göre yansıma dönüşümüdür.



Fonksiyonun Cebirsel Gösterimi	Tanım ve Görüntü Kümesi	İşareti	Azalan-Artan olduğu aralık	Maksimum-Minumum Noktası	Eksenleri Kestiği Noktalar	BireBirlik ve Örtenlik	Tekliği-Çiftliği
$f(x) = -\frac{1}{x}$	Tanım Kümesi	Pozitif	Artan	Maksimum	x Ekseni (Sıfırları)	Bire Birliği	Tek
	$\mathbb{R} - \{0\}$	$x < 0$	$\mathbb{R} - \{0\}$	Yok	Yok	Bire bir	
	Görüntü Kümesi	Negatif	Azalan	Minimum	y Ekseni	Örtenliği	
	$\mathbb{R} - \{0\}$	$x > 0$	–	Yok	Yok	Örten değil	

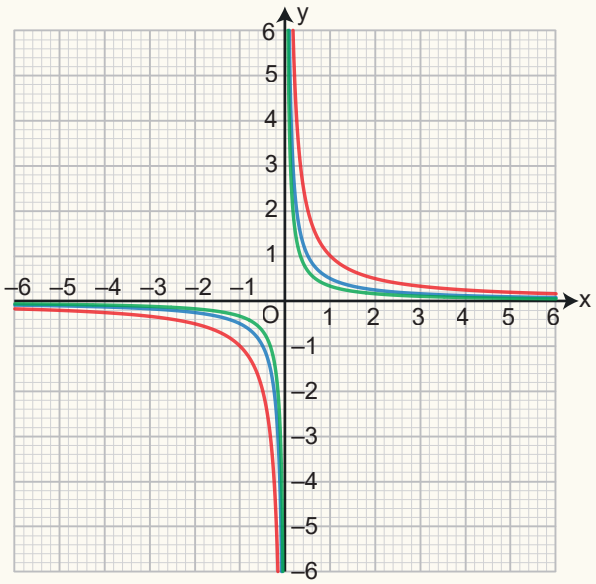
Dikeyde daralma ve genişleme

	• $\frac{1}{x}$	Rasyonel referans fonksiyonu
Eğri üzerinde noktaların değerlerini 2 katına eşler.	• $\frac{2}{x}$	Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre dikeyde 2 kat daralma dönüşümü
Eğri üzerindeki noktaların değerlerini 3 katına eşler.	• $\frac{3}{x}$	Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre dikeyde 3 kat daralma dönüşümü



$f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{3}{x}$

• $\frac{1}{x}$	Rasyonel referans fonksiyonu
• $\frac{1}{2x}$	Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre dikeyde 2 kat genişleme dönüşümü
• $\frac{1}{3x}$	Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre dikeyde 3 kat genişleme dönüşümü



$f(x) = \frac{1}{x}$ $g(x) = \frac{1}{2x}$ $f(x) = \frac{1}{3x}$

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Dikey daralma ve genişleme

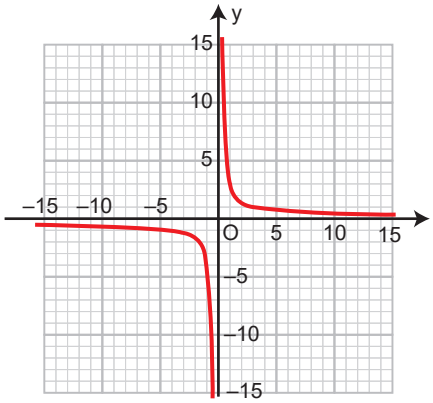
$a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$g(x) = a \cdot \frac{1}{x - r} + k$$

i. $r = 0$ ve $k = 0$ durumu

Örnek

$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{3}{x}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



- Grafik çizilirken rasyonel referans fonksiyonun 3 katı alınmış bu durumda eğri üzerindeki noktalarının değeri 3 katına çıkmış olur. Yani dikeyde 3 kat dikey daralma dönüşümü uygulanmıştır.

Buna göre aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. g fonksiyonunun tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

b. g fonksiyonunun görüntü kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

c. g fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık: $\mathbb{R} - \{0\}$

d. g fonksiyonunun işareti: $(-\infty, 0)$ aralığında $f(x) < 0$
$(0, \infty)$ aralığında $f(x) > 0$

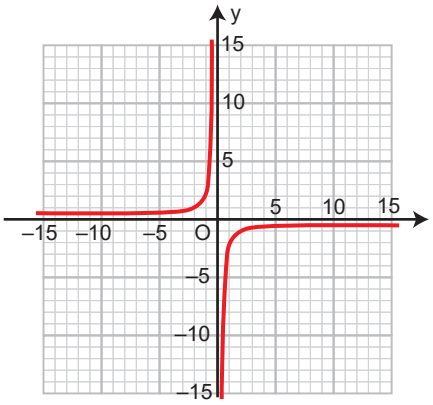
e. g fonksiyonunun varsa maksimum ya da minimum noktası: Maksimum yada minimum noktası yoktur.

f. g fonksiyonun birebirliği: Bire birdir.

g. g fonksiyonunun örtenliği: Örten değildir.

h. g fonksiyonunun tekliği-çiftliği: Tek fonksiyon

1. $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{-2}{x}$ fonksiyonu veriliyor.



- Grafik çizilirken rasyonel referans fonksiyonun grafik temsiline göre dikeyde 2 kat daralma dönüşümü ve sonra x eksenine göre yansıma dönüşümü uygulanmıştır.

Buna göre, aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. g fonksiyonunun tanım kümesi: $R-\{0\}$

b. g fonksiyonunun görüntü kümesi: $R-\{0\}$

c. g fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık: $R-\{0\}$

d. g fonksiyonunun işareti: $(-\infty,0)$'da $f(x)>0$
$(0,\infty)$'da $f(x)<0$

e. g fonksiyonunun varsa maksimum ya da minimum noktası maksimum ya da minimum yoktur.

f. g fonksiyonun birebirliği: Bire birdir.

g. g fonksiyonunun örtenliği: örtenliği yoktur.

h. g fonksiyonunun tekliği-çiftliği: Tek fonksiyon

a) $\mathbb{R} - \{0\}$ b) $\mathbb{R} - \{0\}$ c) $\mathbb{R} - \{0\}$
d) $(-\infty, 0)$ aralığında $f(x) > 0$ $(0, \infty)$ aralığında $f(x) < 0$
e) Maksimum yada minimum noktası yoktur.
f) Bire birdir g) Örten değildir h) Tek fonksiyon

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

x eksenine göre öteleme

$a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

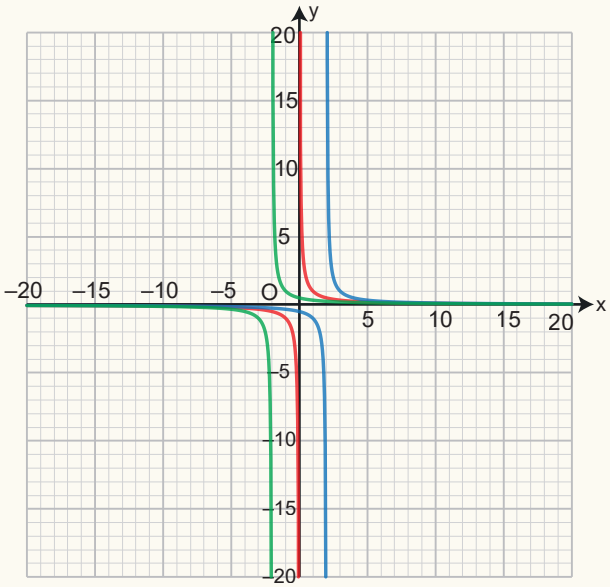
$$g(x) = a \cdot \frac{1}{x - r} + k$$

ii. $k = 0$ durumu

$$g(x) = a \cdot \frac{1}{x - r}$$

fonksiyonunun grafiği çizilirken önce rasyonel referans fonksiyonu $\left(\frac{1}{x}\right)$ çizilir daha sonra $r > 0$ olmak üzere grafik x ekseninde pozitif yönde r birim kadar ötelenir. Son olarak da eğri üzerindeki tüm noktaların değerleri a katına çıkarılır.

• $\frac{1}{x}$	Rasyonel referans fonksiyonu
• $\frac{1}{x-2}$	Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre x ekseninin pozitif yönünde 2 birim öteleme dönüşümü
• $\frac{1}{x+2}$	Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre x ekseninin negatif yönünde 2 birim öteleme dönüşümü



$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x-2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x+2}$

y eksenine göre öteleme

$a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

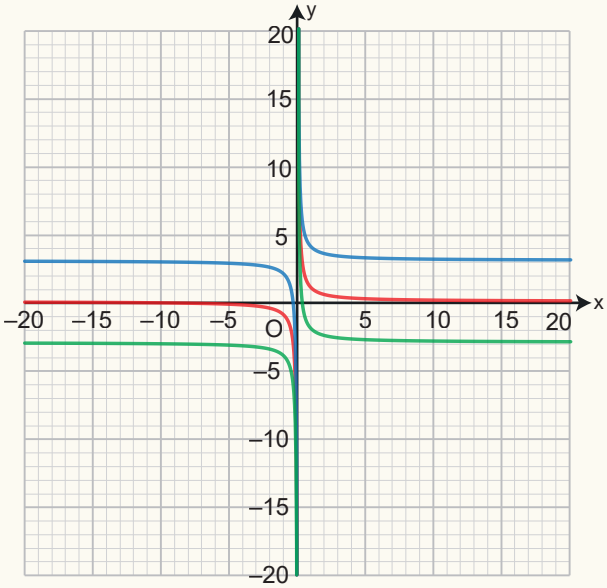
$$g(x) = a \cdot \frac{1}{x - r} + k$$

iii. $r = 0$ durumu

$$g(x) = a \cdot \frac{1}{x} + k$$

fonksiyonunun grafiği çizilirken önce $\left(\frac{1}{x}\right)$ rasyonel referans fonksiyonu çizilir daha sonra eğri üzerindeki tüm noktaların değerleri a katına çıkarılır. Son olarak da $k > 0$ olmak üzere, $\frac{a}{x}$ eğrisi y ekseninin pozitif yönünde k birim kadar ötelenir.

• $\frac{1}{x}$	Rasyonel referans fonksiyonu
• $\frac{1}{x} + 3$	Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre y ekseninin pozitif yönünde 3 birim öteleme dönüşümü
• $\frac{1}{x} - 3$	Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre y ekseninin negatif yönünde 3 birim öteleme dönüşümü



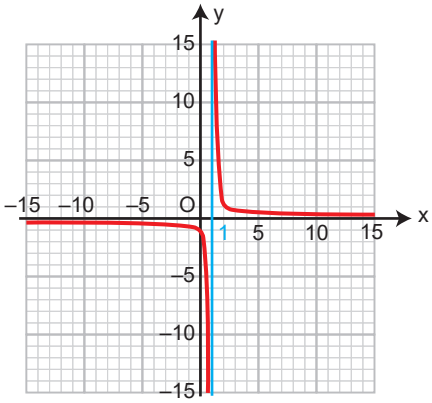
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad g(x) = \frac{1}{x} + 3$ $\quad f(x) = \frac{1}{x} - 3$

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

x eksenine göre öteleme

Örnek

$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{1\}$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Buna göre aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. f fonksiyonunun tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{1\}$

b. f fonksiyonunun görüntü kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

c. f fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık: $\mathbb{R} - \{1\}$

d. f fonksiyonunun işareti: $(-\infty, 1)$ aralığında $f(x) < 0$
$(1, \infty)$ aralığında $f(x) > 0$

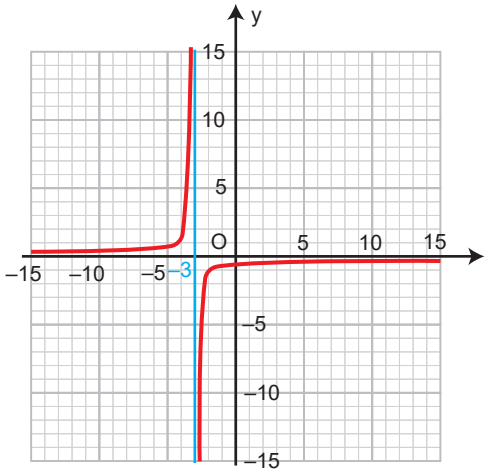
e. f fonksiyonunun varsa maksimum ya da minimum noktası: Maksimum yada minimum noktası yoktur.

f. f fonksiyonunun birebirliği: Bire birdir.

g. f fonksiyonunun örtenliği: Örtendir.

h. f fonksiyonunun tekliği-çiftliği: Ne tek nede çift fonksiyon.

1. $f: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{-2}{x+3}$ fonksiyonu veriliyor.



Buna göre, aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. f referans rasyonel fonksiyonuna hangi dönüşümler uygulanarak elde edilmiştir?
x ekseninin negatif yönde 3 birim öteleme
2 kat dikey daralma
x eksenine göre yansıma

b. f fonksiyonunun tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{-3\}$

c. f fonksiyonunun görüntü kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

d. f fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık $\mathbb{R} - \{-3\}$

e. f fonksiyonunun işareti: $(-\infty, -3)$ aralığında $f(x) > 0$
$(-3, \infty)$ aralığında $f(x) < 0$

f. f fonksiyonunun varsa maksimum ya da minimum noktası Maksimum yada minimum noktası yoktur.

g. f fonksiyonunun birebirli Bire birdir

h. f fonksiyonunun örtenliği: Örten değildir

i. f fonksiyonunun tekliği-çiftliği: Ne tek nede çift fonksiyon

a) • x ekseninin negatif yönde 3 birim öteleme
• 2 kat dikey daralma
• x eksenine göre yansıma

b) $\mathbb{R} - \{-3\}$ c) $\mathbb{R} - \{0\}$ d) $\mathbb{R} - \{-3\}$

e) $(-\infty, -3)$ aralığında $f(x) > 0$ $(-3, \infty)$ aralığında $f(x) < 0$

f) Maksimum yada minimum noktası yoktur.

g) Bire birdir h) Örten değildir i) Ne tek nede çift fonksiyon

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

y eksenine göre öteleme

Örnek

$g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{2}{x} - 1$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

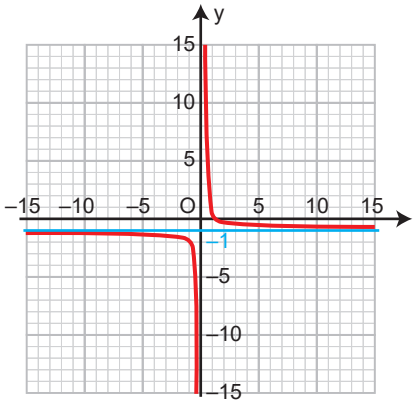
- Rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre, önce dikeyde 2 kat daralma dönüşümü daha sonra y ekseninin negatif yönünde 1 birim öteleme dönüşümü uygulanarak elde edilmiştir.

g'nin sıfırı

$\frac{2}{x} - 1 = 0$

$\frac{2}{x} = 1$

$x = 2$



Buna göre aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. g fonksiyonunun tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

b. g fonksiyonunun görüntü kümesi: $\mathbb{R} - \{-1\}$

c. g fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık: $\mathbb{R} - \{0\}$

d. g fonksiyonunun işareti: $(0, 2)$ aralığında $f(x) > 0$
$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ aralığında $f(x) < 0$

e. g fonksiyonunun varsa maksimum ya da minimum noktası: Maksimum yada minimum noktası yoktur.

f. g fonksiyonun birebirliği: Bire birdir.

g. g fonksiyonunun örtenliği: Örten değildir.

h. g fonksiyonunun tekliği-çiftliği: Ne tek nede çift fonksiyon.

i. g fonksiyonunun sıfırı: 2'dir.

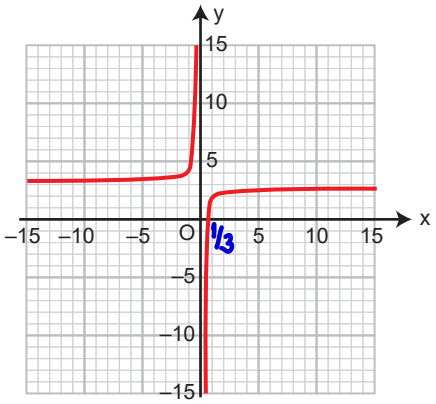
1. $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{-1}{x} + 3$ fonksiyonu veriliyor.

f nin sıfırı

$\frac{-1}{x} + 3 = 0$

$\frac{1}{x} = 3$

$x = \frac{1}{3}$



Buna göre, aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. f fonksiyonunun tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

b. f fonksiyonunun görüntü kümesi: $\mathbb{R} - \{3\}$

c. f fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık: $\mathbb{R} - \{0\}$

d. f fonksiyonunun işareti: $\left(-\infty, 0\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ aralığında $f(x) > 0$
$\left(0, \frac{1}{3}\right)$ aralığında $f(x) < 0$

e. f fonksiyonunun varsa maksimum ya da minimum noktası . Maksimum yada minimum noktası yoktur.

f. f fonksiyonun birebirliği: Bire birdir

g. f fonksiyonunun örtenliği: Örten değildir

h. f fonksiyonunun tekliği-çiftliği: Ne tek nede çift fonksiyon

i. f fonksiyonunun sıfırı: Sıfırı $= \frac{1}{3}$

a) $\mathbb{R} - \{0\}$ b) $\mathbb{R} - \{3\}$ c) $\mathbb{R} - \{0\}$
d) $\left(-\infty, 0\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ aralığında $f(x) > 0$ $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ aralığında $f(x) < 0$
e) Maksimum yada minimum noktası yoktur.
f) Bire birdir g) Örten değildir h) Ne tek nede çift fonksiyon
ı) Sıfırı $= \frac{1}{3}$

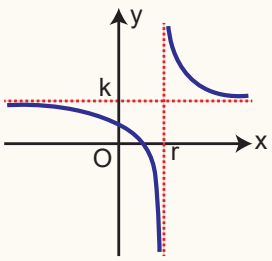
Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

$a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

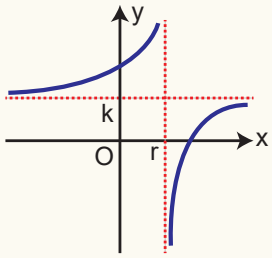
$$g(x) = a \cdot \frac{1}{x - r} + k$$

iv. $r \neq 0$ ve $k \neq 0$ durumu

$a > 0, r > 0, k > 0$



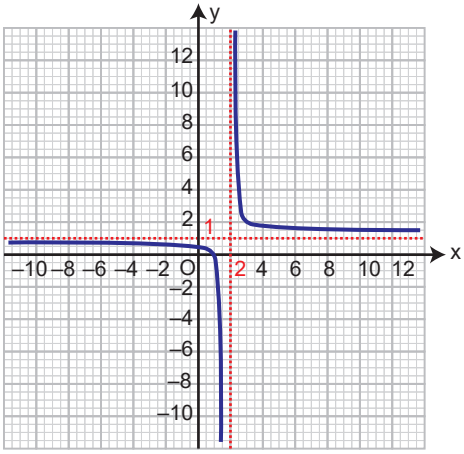
$a < 0, r > 0, k > 0$



Örnek

$f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x - 2} + 1$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

Aşağıdaki rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsiline göre, önce x ekseninin pozitif yönünde 2 birim öteleme sonra y ekseninin pozitif yönünde 1 birim öteleme dönüşümü uygulanmıştır.



Buna göre aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. f fonksiyonunun tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{2\}$

b. f fonksiyonunun görüntü kümesi: $\mathbb{R} - \{1\}$

c. f fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık: $\mathbb{R} - \{1\}$

d. f fonksiyonunun işareti: $(1, 2)$ aralığında $f(x) < 0$
$(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ aralığında $f(x) > 0$

e. f fonksiyonunun varsa maksimum ya da minimum noktası: Maksimum ya da minimum noktası yoktur.

f. f fonksiyonunun birebirliği: Bire birdir.

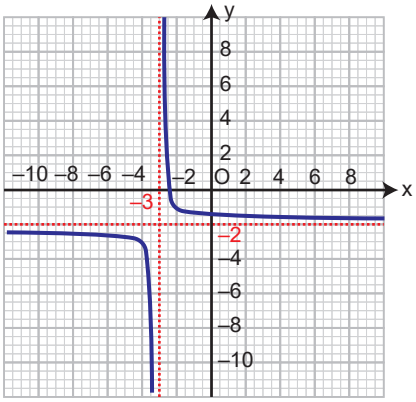
g. f fonksiyonunun örtenliği: Örten değildir.

h. f fonksiyonunun tekliği-çiftliği: Ne tek nede çift fonksiyon.

i. f fonksiyonunun sıfırı: $x = 1$

1. $f: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = \frac{1}{x + 3} - 2$ fonksiyonu veriliyor.



Buna göre, aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. f fonksiyonu rasyonel referans fonksiyonuna hangi dönüşümler uygulanarak elde edilmiştir?
x ekseninin negatif yönünde 3 birim öteleme
y ekseninin negatif yönünde 2 birim öteleme

b. f fonksiyonunun tanım kümesi: $\mathbb{R} - \{-3\}$

c. f fonksiyonunun görüntü kümesi: $\mathbb{R} - \{-2\}$

d. f fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık: $\mathbb{R} - \{-3\}$

e. f fonksiyonunun işareti: $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{-5}{2}, \infty\right) \to f(x) < 0$
$\left(-3, \frac{-5}{2}\right) \to f(x) > 0$

f. f fonksiyonunun varsa maksimum ya da minimum noktası: Maksimum ya da minimum noktası yoktur.

g. f fonksiyonunun birebirliği: Bire birdir

h. f fonksiyonunun örtenliği: Örten değildir

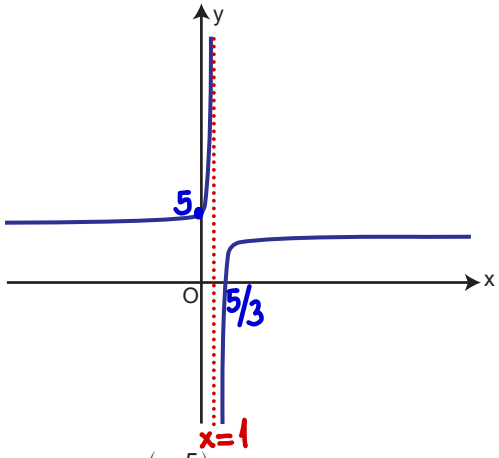
i. f fonksiyonunun tekliği-çiftliği: Ne tek ne de çift çift fonksiyon

j. f fonksiyonunun sıfırı: $x = \frac{-5}{2}$

a) • x ekseninin negatif yönünde 3 birim öteleme
• y ekseninin negatif yönünde 2 birim öteleme
b) $\mathbb{R} - \{-3\}$ c) $\mathbb{R} - \{-2\}$ d) $\mathbb{R} - \{-3\}$
e) $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{-5}{2}, \infty\right) \to f(x) < 0$ $\left(-3, \frac{-5}{2}\right) \to f(x) > 0$
f) Maksimum ya da minimum noktası yoktur. g) Bire birdir
h) Örten değildir i) Ne tek ne de çift çift fonksiyon j) $x = \frac{-5}{2}$

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

2. Aşağıda referans rasyonel fonksiyonundan türetilen f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



- f fonksiyonu $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ aralığında negatif değerler almaktadır.
- f fonksiyonunun grafiği y eksenini (0, 5) noktasında kesmektedir.

a, b ve c birer reel sayı olmak üzere, f fonksiyonunun cebirsel temsili

$$f(x) = a + \frac{b}{x + c}$$

olduğuna göre, a − b − c işleminin sonucu kaçtır?

6

$1+c=0$
$c=-1$

$x=0$ için $a+\frac{b}{c}=5 \Rightarrow a-b=5$ ($c \to -1$)

$a-b-c=5-(-1)=6$

3. Bir öğrenci $f(x) = \frac{2}{x+6} - 1$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak verilen tanım ve görüntü kümesine göre istenilen özelliklere uygun olarak tabloyu aşağıdaki şekilde doldurmuştur.

Tanım ve değer kümesi	Bire birliği	Örtenliği	En büyük ve en küçük değeri	Sıfırları	Aratn - azalanlığı
f: [−5, −4] → [0, 1]	Birebir	Örten	Max 1 Min 0	−4	Azalan
	I.✓	II.✓	III.✓	IV.✓	V.✓

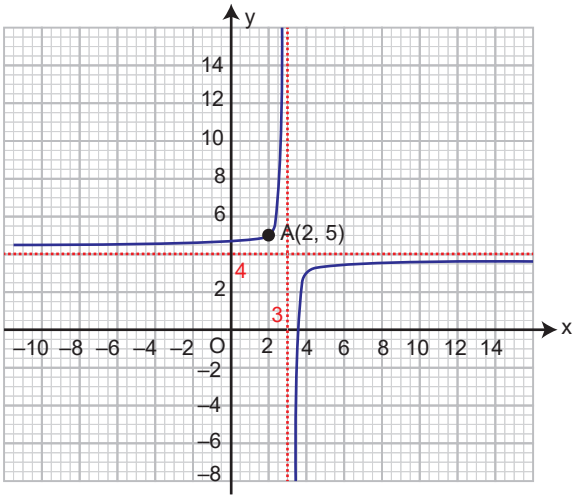
$f(-5)=\frac{2}{1}-1=1 \to$ max.

$f(-4)=\frac{2}{2}-1=0 \to$ min.

$\frac{2}{x+6}-1=0$
$x+6=2$
$x=-4$ (sıfırı)

Tanımlı olduğu aralıkta bire bir, örten ve azalandır.

4. a ve b gerçel sayı olmak üzere, aşağıda tanım kümesi $\mathbb{R} - \{3\}$ olan $f(x) = \frac{a}{x-3} + b$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. f fonksiyonunun grafiği y eksenini $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ noktasında kesmektedir.



Buna göre,

✓ f fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{4\}$'tür.

✓ II. f fonksiyonu $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ aralığında artandır.

✓ III. f fonksiyonu $3 < x < 3{,}25$ aralığında negatiftir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

I, II ve III

$f(x)=\frac{a}{x-3}+4 \Rightarrow f(2)=-a+4=5 \Rightarrow a=-1$

$\frac{-1}{x-3}+4=0 \Rightarrow \frac{1}{x-3}=4 \Rightarrow 4x-12=1$
$4x=13$
$x=3{,}25$

5. a, r, k ∈ ℝ olmak üzere,

$$f(x) = a \cdot \frac{1}{x - r} - k$$

fonksiyonuyla ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{2\}$'dir.
- f fonksiyonunun negatif değerler aldığı en geniş aralık $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$'dir. → Fonksiyonun sıfırı

Buna göre, $\frac{a \cdot r}{k}$ oranı kaçtır?

−1

$2-r=0 \Rightarrow r=2$

$\frac{a}{\frac{3}{2}-2}-k=0 \Rightarrow \frac{a}{-\frac{1}{2}}=k \Rightarrow \frac{a}{k}=-\frac{1}{2}$

$\frac{a.r}{k}=-\frac{1}{2}.2=-1$

Geçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Etkinlik 1

Bir su motoru, belirli bir hacimdeki suyu belirli bir sürede yukarı taşımaktadır. Motorun gücü P (watt), yapılan iş W (joule) ve işin tamamlanma süresi t (saniye) ile şu şekilde ifade edilir:

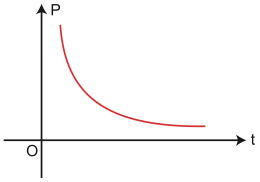
$$P = \frac{W}{t}$$

Burada yapılan iş, suyun belirli bir yükseklik (h) boyunca taşınması için harcanan enerji ile ilgilidir.

Bir su pompası, 600 joule'lik işi t sürede yapmaktadır. Gücün t'ye bağlı fonksiyonu P(t) olmak üzere:

a. P fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

$P(t) = \frac{600}{t}$



b. Fonksiyonun artan-azalan aralıklarını inceleyiniz.

$(0, \infty)$ aralığında azalandır.

c. Fonksiyonun birebirliğini inceleyiniz.

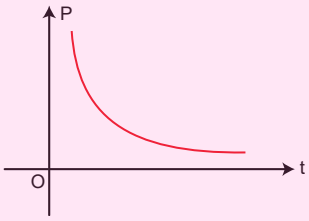
Yatay doğru testine göre birebirdir.

d. $5 \leq t \leq 50$ aralığında gücün en büyük ve en küçük değerlerini bulunuz.

$P(5) = \frac{600}{5} = 120$ max.

$P(50) = \frac{600}{50} = 12$ min.

a) $P(t) = \frac{600}{t}$



b) $(0, \infty)$ aralığında azalandır.

c) Bire birdir.

d) P(5) = 120 max P(50) = 12 min

Etkinlik 2

Bir spor kulübü, düzenlediği bir etkinliğin toplam maliyetini katılımcılara eşit olarak paylaştırmak istemektedir.

- Etkinliğin toplam maliyeti 3000 TL'dir.
- Etkinliğe katılan kişi sayısı x olmak üzere, kişi başına düşen maliyet K(x) fonksiyonu ile ifade edileceğine göre,

a. K(x) fonksiyonunun cebirsel ifadesini yazınız.

$K(x) = \frac{3000}{x}$

b. Etkinliğe katılan her kişi, kendisine düşen ücrete ek olarak 50 TL bağış yapmaktadır.

Bu durumda, her katılımcının toplam kişi başı ödediği ücret T(x) fonksiyonu ile ifade edileceğine göre,

T(x) fonksiyonunun cebirsel ifadesini yazınız.

$T(x) = \frac{3000}{x} + 50$

c. Etkinlik günü, kulüp yöneticileri etkinliğe katılan 4 kişinin ücretini karşılamıştır.

Geriye kalan katılımcılar maliyeti paylaşacaktır.

Ödeme yapanların kişi başı maliyeti, D(x) fonksiyonu ile ifade edileceğine göre,

D(x) fonksiyonunun cebirsel ifadesini yazınız.

$D(x) = \frac{3000}{x-4}$

a) $K(x) = \frac{3000}{x}$

b) $T(x) = \frac{3000}{x} + 50$

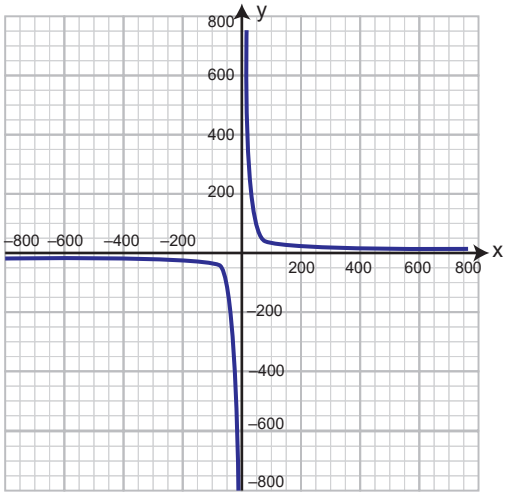
c) $D(x) = \frac{3000}{x-4}$

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

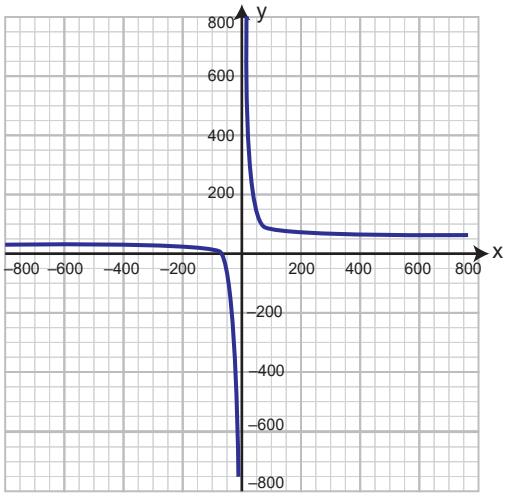
Etkinlik 3

Aşağıda K(x), T(x) ve D(x) rasyonel fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir.

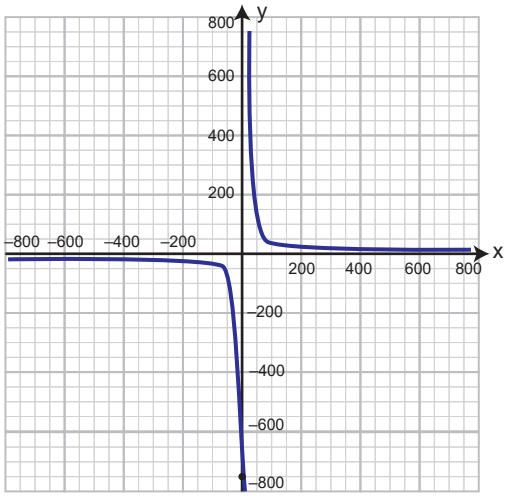
- $K(x) = \frac{3000}{x}$



- $T(x) = \frac{3000}{x} + 50$



- $D(x) = \frac{3000}{x - 4}$



a. **T(x) fonksiyonunun grafiği, K(x)'in grafiği üzerine nasıl bir dönüşüm uygulanarak elde edilmiştir?**

a) $T(x) = K(x) + 50 = \frac{3000}{x} + 50$

T(x), K(x)'in grafiğinin y ekseninde pozitif yönde 50 birim ötelenmesidir.

b. **D(x) fonksiyonunun grafiği, K(x)'in grafiği üzerine nasıl bir dönüşüm uygulanarak elde edilmiştir?**

b) $D(x) = \frac{3000}{x - 4}$

D(x), K(x)'in grafiğinin x ekseninde sağa doğru 4 birim ötelenmesidir.

a) $T(x) = K(x) + 50 = \frac{3000}{x} + 50$

T(x), K(x)'in grafiğinin y ekseninde pozitif yönde 50 birim ötelenmesidir.

b) $D(x) = \frac{3000}{x - 4}$

D(x), K(x)'in grafiğinin x ekseninde sağa doğru 4 birim ötelenmesidir.

Gerçek Sayılarda $f(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyonun Nitel Özellikleri

Etkinlik 4

Bir maddenin yoğunluğu $d = \frac{m}{v}$ formülüyle hesaplanır.

A maddesinin kütlesi 2 kg ve hacmi V litre, B maddesinin kütlesi 3 kg ve hacmi A'nın hacminden 2 litre fazladır.

a. Ave B maddelerinin yoğunluk fonksiyonlarını yazınız.

A maddesinin yoğunluk fonksiyonu: $d_A(V) = \frac{2}{V}$

B maddesinin yoğunluk fonksiyonu: $d_B(V) = \frac{3}{V+2}$

b. Buna göre, A maddesinin yoğunluk fonksiyonu grafiğine hangi dönüşümler uygulanarak B maddesinin yoğunluk fonksiyonu grafiği elde edilebilir:

A maddesinin yoğunluk fonksiyonu grafiği üzerindeki noktaların y değerlerini $\frac{3}{2}$ katına çıkarmak.

Elde edilen grafiği x ekseninin negatif yönünde 2 birim ötelemek.

a) A maddesinin yoğunluk fonksiyonu: $d_A(V) = \frac{2}{V}$

B maddesinin yoğunluk fonksiyonu: $d_B(V) = \frac{3}{V+2}$

b) A maddesinin yoğunluk fonksiyonu grafiği üzerindeki noktaların y değerlerini $\frac{3}{2}$ katına çıkarmak.

Elde edilen grafiği x ekseninin negatif yönünde 2 birim ötelemek.

Etkinlik 5

Bir büyütecin büyütme katsayısı A, büyüteç ile nesne arasındaki d mesafesine bağlı olarak aşağıdaki fonksiyonla tanımlanmaktadır (*mesafe desimetre cinsindendir*):

$$A(d) = \frac{5}{5-d}$$

a. Büyütme katsayısının 5 olması için, nesnenin büyüteçten hangi mesafede bulunması gerektiğini belirleyiniz.

$$\frac{5}{5-d} = 5$$

$$5 - d = 1$$

$$d = 4$$

b. Fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini bulunuz.

T.K $= \mathbb{R} - \{5\}$

G.K $= \mathbb{R} - \{0\}$

c. Fonksiyonun artan ya da azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

$$y = \frac{5}{5-d}$$

$$y = \frac{-5}{d-5}$$

Tanım kümesinde artandır.

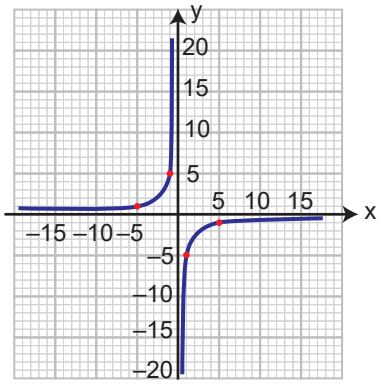
a) 4

b) T.K = $\mathbb{R} - \{5\}$ G.K = $\mathbb{R} - \{0\}$

c) Fonksiyon tanım kümesinde artandır.

Performans Değerlendirme

1. Aşağıda bir rasyonel, fonksiyonun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(x) = \frac{-5}{x}$'tir.

II. f fonksiyonu tek fonksiyondur.

III. f fonksiyonunun minimum ve maksimum değeri yoktur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

EEE

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II

D) II ve III E) I, II ve III

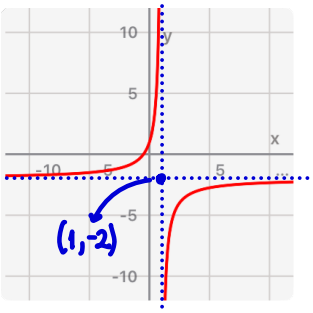
$f(-x) = \frac{-5}{-x} = \frac{5}{x} = -f(x)$

Tek fonksiyondur.

2. $\mathbb{R} - \{1\}$'de tanımlı

$$f(x) = \frac{-3}{x-1} - 2 \rightarrow$$

rasyonel fonksiyonu veriliyor.



Buna göre,

I. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ aralığında $f(x) < 0$'dır.

II. f fonksiyonu tek fonksiyondur.

III. f fonksiyonu $\mathbb{R} - \{1\}$'de artandır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

DDD

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II

D) I ve III E) II ve III

$\frac{-3}{x-1} - 2 = 0 \Rightarrow x-1 = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

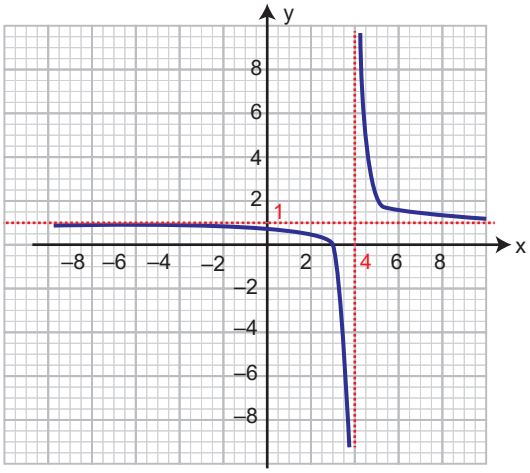
Ne tek ne çift fonksiyon

3. a ve b birer gerçel sayı olmak üzere, aşağıda

$$f(x) = \frac{1}{x-a} - b$$

$a=4,\ b=1$

fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. f fonksiyonunun görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{1\}$'dir.

II. f fonksiyonu $\mathbb{R} - \{4\}$'te azalandır.

III. f fonksiyonu bire birdir.

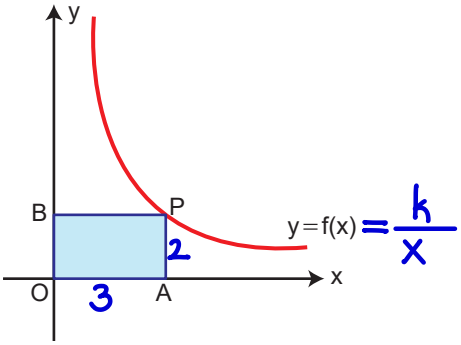
ifadelerinden hangileri doğrudur?

EEE

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II

D) II ve III E) I, II ve III

4. Aşağıda verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde alınan her noktadaki apsis ve ordinatların çarpımı sabittir.



OAPB dörtgeninin alanı 6 birim kare ve P noktasının ordinatı 2 olduğuna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunun cebirsel temsili aşağıdakilerden hangisidir?

CCC

$P(3,2)$ için $f(3) = \frac{k}{3} = 2$

$k = 6$

$f(x) = \frac{6}{x}$

ACİL MATEMATİK

Doğrusal, Karesel, Karekök ve Rasyonel Referans Fonksiyonları ile Bu Fonksiyonlardan Türetilebilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonları

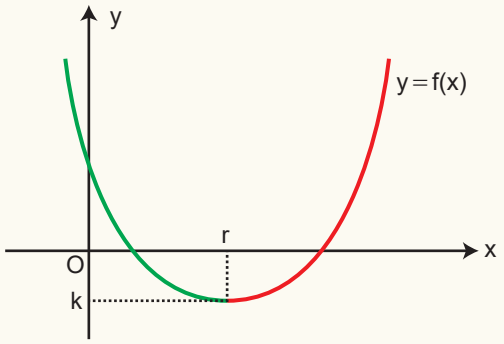
- **Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için fonksiyon birebir ve örten olmalıdır.**

a. f: A → B fonksiyonunun örten olması için f fonksiyonunun değer kümesi (B), görüntü kümesine eşit olmalıdır.

b. f: A → B ⇒ f^{-1}: B → A dır.

Yani f fonksiyonunun görüntü kümesi f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesine eşittir.

c. f fonksiyonunun birebirliği ise karesel fonksiyonlarda önemlidir. $f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ fonksiyonun birebir olması için f fonksiyonunun tanım kümesinin $A = (-\infty , r]$ ya da $A = [r, \infty)$ olması gerekir.



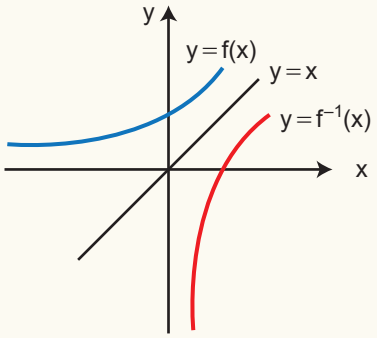
- **Bir fonksiyonun tersi alınırken aşağıdaki adımlar uygulanır.**

a. f(x) = y yazılır.

b. x yalnız bırakılır.

c. x yerine y, y yerine x yazılır.

- **Bir fonksiyonunun tersinin grafiği, fonksiyonun grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriğidir.**



Doğrusal Fonksiyonların Tersi

f: ℝ → ℝ, (a ≠ 0 ve a,b ∈ R) olmak üzere,

f(x) = ax + b doğrusal fonksiyonun tersi şöyle bulunur.

$y = ax + b$ (y = f(x))

$y - b = a \cdot x$ (x'i yalnız bırak)

$\frac{y - b}{a} = x$

$\frac{x - b}{a} = y = f^{-1}(x)$ (x yerine y, y yerine x yaz)

ÖRNEK:

f: ℝ → ℝ

$f(x) = 2x + 1$ ise $f^{-1}(x) = ?$

$y = 2x + 1$

$y - 1 = 2x$

$x = \frac{y - 1}{2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$ olur.

$y = f(x) = 2x + 1$

Bağımsız:	x	–2	–1	0	1	2
Bağımlı:	y	–3	–1	1	3	5

$y = f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$

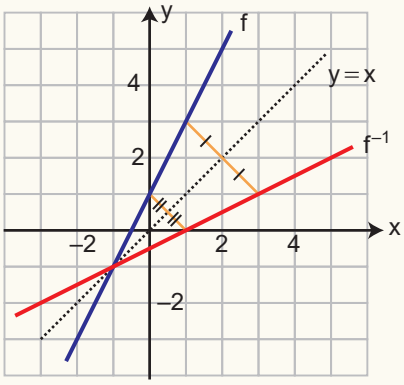
Bağımsız:	x	–3	–1	1	3	5
Bağımlı:	y	–2	–1	0	1	2

Dikkat edilirse f fonksiyonundaki her bağımsız değişken f^{-1} fonksiyonunda bağımlı, her bağımlı değişken de bağımsız değişken olmuştur.

Örneğin; $f(-2) = -3$ iken $f^{-1}(-3) = -2$ olmuştur.

↓ Bağımsız değişken ↓ Bağımlı değişken

Aşağıda f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri çizilmiştir.



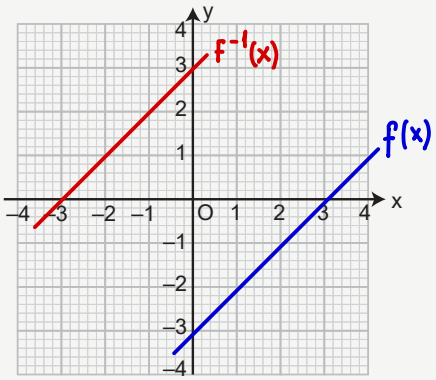
Grafiğe dikkat edilirse f ve f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri y = x doğrusuna göre simetriktir.

Doğrusal Fonksiyonların Tersi

1.

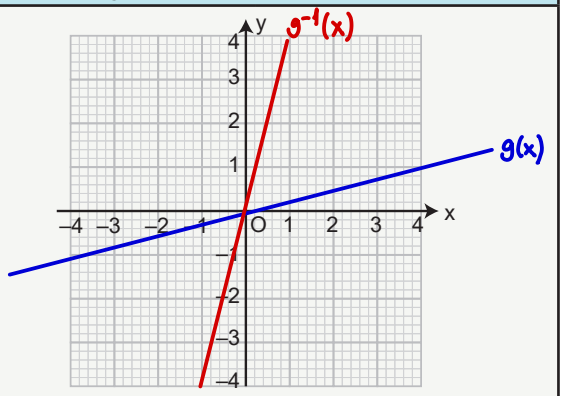
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili
$f(x) = x-3$	$f^{-1}(x) = x+3$

Fonksiyonun ve Tersinin Grafik Temsili



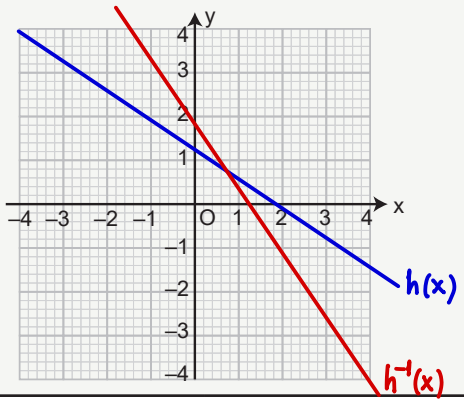
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili
$g(x) = \frac{x}{4}$	$g^{-1}(x) = 4x$

Fonksiyonun ve Tersinin Grafik Temsili



Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Fonksiyonun Tersinin Cebirsel Temsili
$h(x) = \frac{-2x+4}{3}$	$h^{-1}(x) = \frac{-3x+4}{2}$

Fonksiyonun ve Tersinin Grafik Temsili



2. Bir araç kilometre başına 0,05 litre yakıt tüketmektedir. Araç, deposunda 10 litre yakıt varken 200 km uzunluğundaki bir yolu gitmek için harekete başlamıştır. Depoda kalan yakıt miktarının alınan yolun uzunluğuna bağlı fonksiyonu g'dir.

Buna göre, $g^{-1}(x)$ fonksiyonunu sözel olarak ifade edip cebirsel temsilini bulunuz.

$g(x) = 10 - \frac{x}{20}$

$g^{-1}(x)$: Depoda kalan yakıt miktarına bağlı olarak, aracın kaç km yol aldığı

$g^{-1}(x) = 20 \cdot (10 - x)$

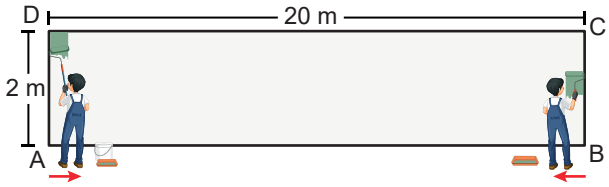
$g(x) = 10 - x.0{,}05$

$g(x) = 10 - x.\frac{5}{100} = 10 - \frac{x}{20}$

$10 - \frac{x}{20} = y \Rightarrow \frac{x}{20} = 10 - y \Rightarrow x = 20.(10-y)$

$g^{-1}(x) = 20.(10-x)$

3.



Yukarıda uzunlukları verilen ABCD duvarının farklı taraflarından çalışmaya başlayan iki işçi duvarı boyayacaktır.

İşçilerden biri duvarın tamamını 10 dakikada diğeri ise 20 dakikada boyayabilmektedir.

Her ikisi de çalışmaya aynı anda başlayıp duvarı birlikte boyayacaklardır.

x. dakikada duvardaki boyanmamış alanı metrekare cinsinden veren fonksiyon f olmak üzere,

$$f: \left[0, \frac{20}{3}\right] \to [0, 40]$$

olduğu biliniyor.

Buna göre, $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

$\frac{40-x}{6}$

1. işçi $\rightarrow \frac{40}{10} = 4$ 2 işçi $\rightarrow \frac{40}{20} = 2$

ikisi birlikte dakikada $(4+2) = 6\ m^2$ boyarlar.

$f(x) =$ Toplam Alan − Boyanan Alan

$f(x) = 40 - 6x = y$

$6x = 40 - y \Rightarrow x = \frac{40-y}{6}$

$f^{-1}(x) = \frac{40-x}{6}$

Rasyonel Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

Tanım kümesi ↓ Değer kümesi ↓

f:A → B olmak üzere

$f(x) = \frac{1}{x}$ rasyonel referans

fonksiyonunu ele alalım:

- Payda sıfır olduğunda fonksiyon tanımsız olacağından tanım kümesi olan A kümesini $\mathbb{R} - \{0\}$ şeklinde seçmeliyiz.
- Tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ olan $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun birebir olduğunu daha önce görmüştük.
- Fonksiyonun örten olması için değer kümesinin görüntü kümesine eşit olması gerekirdi. f rasyonel referans fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ iken görüntü kümesi de $\mathbb{R} - \{0\}$ dır.

Bu durumda değer kümesi de $B = \mathbb{R} - \{0\}$ olmalıdır.

Sonuç olarak;

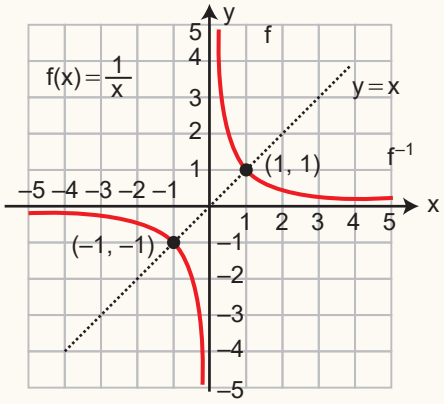
$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ olursa

$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun tersi bulunur.

$y = \frac{1}{x}$ $(y = f(x))$

$x = \frac{1}{y}$ (x' i yalnız bırak)

$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ olur. (x yerine y, y yerine x yaz)



T.K $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

G.K $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

Örnek

$f: A \to B$, $f(x) = \frac{1}{x-2} - 4$ fonksiyonunun tersinin cebirsel temsilini ve ters fonksiyonunun olmasını sağlayan A ve B kümelerini bulunuz.

Çözüm

- Önce f fonksiyonunun tersini bulalım.

$y = \frac{1}{x-2} - 4$

$y + 4 = \frac{1}{x-2}$

$\frac{1}{y+4} = x - 2$

$\frac{1}{y+4} + 2 = x$

$\frac{1}{x+4} + 2 = y = f^{-1}(x)$ olur.

- $y = f(x)$
- x'i yalnız bırak
- x yerine y, y yerine x yaz.

- $f: A \to B$ ifadesinde

A: f fonksiyonunun tanım kümesi

$f(x) = \frac{1}{x-2} - 4$ fonksiyonunda $x - 2 \neq 0$ ise $x \neq 2$ olmalıdır.

$A = \mathbb{R} - \{2\}$ dir.

B kümesi de f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi olacağından:

$f^{-1}(x) = \frac{1}{x+4} + 2$ $\quad x + 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4$ olmalıdır.

$B = \mathbb{R} - \{-4\}$ tür.

Sonuç olarak;

$f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{4\}$ olduğunda f fonksiyonu bire bir ve örten olduğundan $f(x) = \frac{1}{x-2} - 4$ fonksiyonunun tersi bulunabilir.

Rasyonel Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

Etkinlik 3

Bir grup işçinin birlikte çalıştığı bir projede, işçi sayısı arttıkça işin tamamlama süresi azalmaktadır. İşin toplam miktarı değişmediğine göre, süre ile işçi sayısı arasında ters orantı olduğu gözlemlenmiştir.

- 3 işçi bir işi 12 saatte tamamlamaktadır.
- 4 işçi çalıştığında, işin süresi daha da azalmaktadır.

Ayrıca, her durumda iş başlamadan önce 2 saatlik sabit bir hazırlık süresi olup bu hazırlık süresi, toplam sürenin üzerine eklenmektedir.

T(x) fonksiyonu, işçi sayısı x olduğunda, bir işin toplam tamamlama süresini (hazırlık süresi dahil) ifade etmek üzere,

a. T(x) fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

3 işçi 12 saatte yapıyorsa
1 işçi 36 saatte yapar.
x işçi $\frac{36}{x}$ saatte yapar.

$$T(x) = \frac{36}{x} + 2$$

b. T(x) fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

$T.K = \mathbb{R} - \{0\}$

$G.K = \mathbb{R} - \{2\}$

c. $T^{-1}(x)$ fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

$$\frac{36}{x} + 2 = y \Rightarrow \frac{36}{x} = y - 2$$

$$x = \frac{36}{y-2}$$

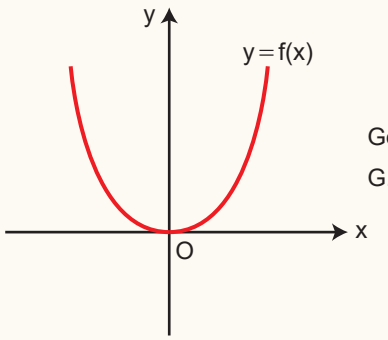
$$T^{-1}(x) = \frac{36}{x-2}$$

a) $T(x) = \frac{36}{x} + 2$
b) $T.K = \mathbb{R} - \{0\}$
$G.K = \mathbb{R} - \{2\}$
c) $T^{-1}(x) = \frac{36}{x-2}$

Karesel Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2$ fonksiyonunu ele alalım.



Görüntü kümesi

$G.K = [0, \infty)$

$f(x) = x^2$ fonksiyonu hem birebir değil hemde $D.K \neq G.K$ olduğundan örten değildir. Bu yüzden;

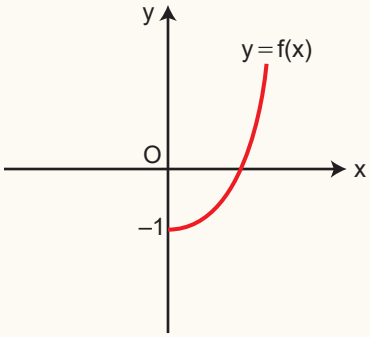
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun tersi bir fonksiyon değildir.

Bu yüzden tersi alınacak olan karesel fonksiyonların tanım kümesi fonksiyon birebir olacak şekilde seçilmelidir. Ayrıca örtenlikten dolayı değer kümesi de görüntü kümesine eşit olmalıdır.

Örneğin;

$f:[0, \infty) \longrightarrow [-1, \infty)$

$f(x) = x^2 - 1$ fonksiyonunun tersini bulalım.



Grafikten görüldüğü üzere f birebir fonksiyondur ve

$G.K = [-1, \infty) = D.K$ olduğundan örtendir. Bu yüzden tersi de fonksiyondur.

$y = x^2 - 1$

$y + 1 = x^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{y+1} = |x|$

$\Rightarrow x = \sqrt{y+1}$ ve $x = -\sqrt{y+1}$

$x \geq 0$ olduğundan $x = \sqrt{y+1}$

$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ bulunur.

Dikkat edilirse f^{-1} fonksiyonunun tanım kümesi $(x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1)$ f fonksiyonunun değer kümesine eşittir.

Karesel Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

Örnek

Bir yakıt deposunun dolumu sırasında depodaki yakıt yüksekliğinin (cm), zamana (dk.) bağlı değişimi $h(t) = t^2 + 5$ fonksiyonuyla modellenmiştir.

Buna göre:

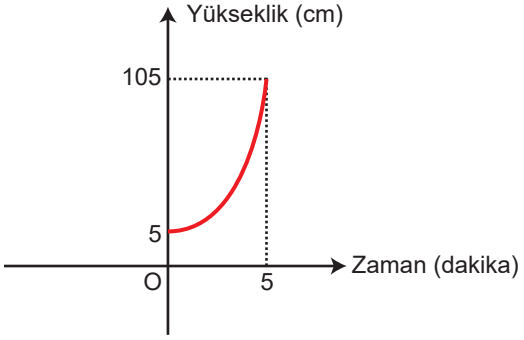
a. **0 - 10 (dakika) zaman aralığında depodaki yakıt yüksekliğinin değişimini gösteren fonksiyonun grafik temsilini çizerek tanım ve görüntü kümesini bulunuz, fonksiyonun artan-azalan olma durumunu inceleyiniz.**

b. **Deponun dolum esnasında geçen zamanın, depodaki yakıt yüksekliğine bağlı değişiminin cebirsel temsilini yazınız. Depodaki yakıt yüksekliğinin 5 - 105 cm aralığında olduğu durumda geçen zamanın değişimin gösteren grafik temsilini çiziniz. Çizdiğiniz grafik temsiline göre tanım ve görüntü kümesini bulunuz, artan - azalan olma durumunu inceleyiniz.**

Çözüm

a)

- $h(t) = t^2 + 5$
- Tanım Kümesi: $t \in [0, 10]$
- Görüntü Kümesi: $h(t) \in [5, 105]$
- Fonksiyon tanımlı olduğu aralıkta artandır.

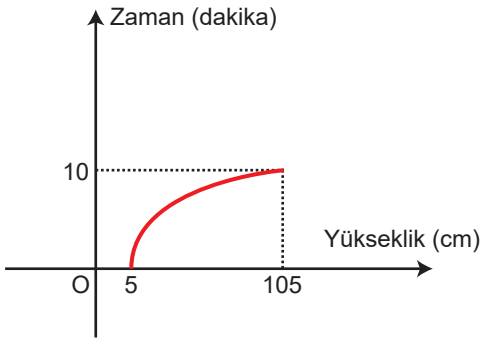


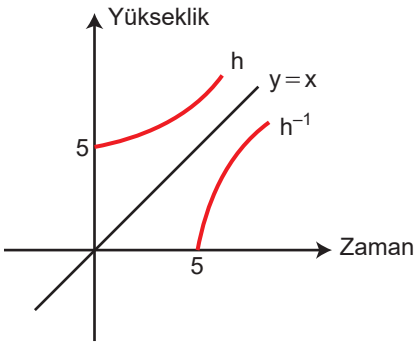
b)

- $h(t) = t^2 + 5 \Rightarrow t^2 = h - 5 \Rightarrow t = \sqrt{h - 5}$

  $\Rightarrow \quad h^{-1}(t) = \sqrt{t - 5}$

- Tanım Kümesi: $h \in [5, 105]$
- Görüntü kümesi: $t \in [0, 10]$
- Fonksiyon tanımlı olduğu aralıkta artandır.



- 

Grafiklerin $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduğu görülüyor.

Karekök Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

f: A → B olmak üzere

$f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonunu ele alalım

- Karekökün içi negatif olduğunda fonksiyon tanımsız olacağından tanım kümesi olan A kümesini $[0, \infty)$ şeklinde seçmeliyiz.
- Tanım kümesi $[0, \infty)$ olan $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun birebir olduğunu daha önce görmüştük.
- Fonksiyonun örten olması için değer kümesinin görüntü kümesine eşit olması gerekirdi. f karekök referans fonksiyonunun değer kümesi de $B = [0, \infty)$ olmalıdır.

Sonuç olarak;

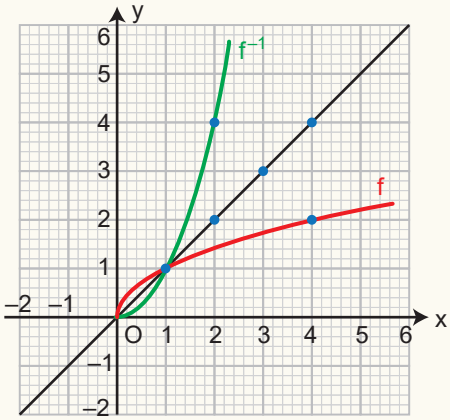
$f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ olursa

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun tersi bulunur.

$y = \sqrt{x}$ $(y = f(x))$

$x = y^2$ (x'i yalnız bırak)

$y = f^{-1}(x) = x^2$ olur. (x yerine y, y yerine x yaz.)



ÖRNEK

$f: [4, \infty) \to [2, \infty)$ olmak üzere,

$f(x) = 2 + \sqrt{x - 4}$

fonksiyonunun tersini bulalım.

ÇÖZÜM

$y = 2 + \sqrt{x - 4}$

$y - 2 = \sqrt{x - 4}$

$(y - 2)^2 = x - 4$

$x = (y - 2)^2 + 4$

Şimdi x ve y' nin yerlerini değiştirelim.

$f^{-1} = y = (x - 2)^2 + 4$ olur.

NOT

$f(x) = 2 + \sqrt{x - 4}$ fonksiyonunun tanımlı olması için;

- $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$ olmalıdır.

Dolayısıyla f fonksiyonunun en geniş tanım aralığı $[4, \infty)$ olur.

- Fonksiyonun tersinin de fonksiyon olması için birebir ve örten olması gerektiğinden örtenlik koşulunu sağlaması için görüntü kümesi değer kümesine eşit olmalıdır. Şimdi, görüntü kümesini bulalım.

$f(x) = 2 + \sqrt{x - 4}$ fonksiyonunda $\sqrt{x - 4} \geq 0$ olduğundan;

$f(x) = 2 + \sqrt{x - 4} \geq 2$ olur.

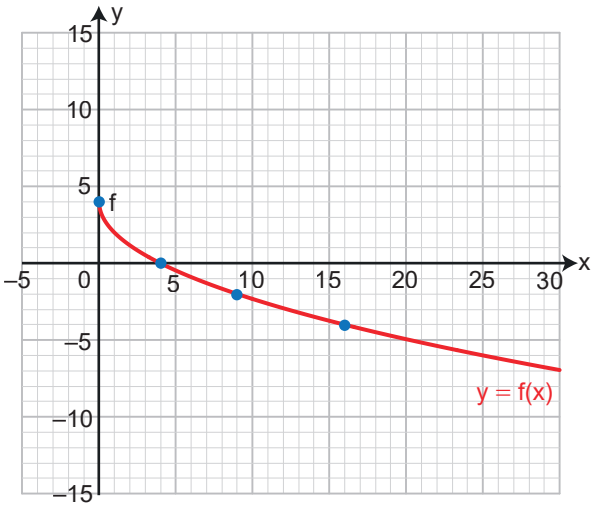
Buradan; f fonksiyonunun görüntü kümesi $[2, \infty)$ olur.

Sonuç olarak f fonksiyonunun tersinin olması için

$f: [4, \infty) \to [2, \infty)$ şeklinde tanımlanmalıdır.

Örnek

Aşağıda karekök referans fonksiyonundan türetilen bir f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

Çözüm

$f(x) = 4 - 2\sqrt{x} \Rightarrow y = 4 - 2\sqrt{x}$

$2\sqrt{x} = 4 - y \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{4 - y}{2}$

$x = \dfrac{(4 - y)^2}{4} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \dfrac{(4 - x)^2}{4}$ olur.

Karekök Referans Fonksiyonun ve Bu Fonksiyonlardan Türetilen Fonksiyonların Ters Fonksiyonlarının Bulunması

1. f: $[3, \infty) \to [0, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x-3}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f^{-1} fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$f^{-1}(x) = x^2 + 3$

$\sqrt{x-3} = y$

$x-3 = y^2$

$x = y^2+3$

$f^{-1}(x) = x^2+3$

2. f: $[-2, \infty) \to [-1, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x+2} - 1$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f^{-1} fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 2$

$\sqrt{x+2} - 1 = y \Rightarrow \sqrt{x+2} = y+1$

$x+2 = (y+1)^2$

$x = (y+1)^2 - 2$

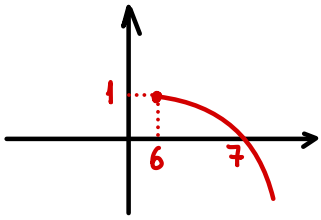
$f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 2$

3. Karekök referans fonksiyonundan türetilen bir f fonksiyonu için aşağıdakiler bilinmektedir.

- f fonksiyonunun maksimum noktası (6, 1)'dir.
- [6, 7) aralığında f(x) > 0'dır.
- (7, ∞) aralığında f(x) < 0'dır.

Buna göre, f^{-1} fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$f^{-1}(x) = (1-x)^2 + 6$



$f(x) = a.\sqrt{x-6} + 1$

$f(7) = a.1 + 1 = 0$

$a = -1$

$y = -\sqrt{x-6} + 1$

$\sqrt{x-6} = 1-y$

$x-6 = (1-y)^2$

$x = (1-y)^2 + 6$

$f^{-1}(x) = (1-x)^2 + 6$

4. f: A → B

$f(x) = 2\sqrt{x} + 5$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, fonksiyonun tersinin cebirsel temsilini ve tersinin fonksiyon olmasını sağlayan A ve B kümesini bulunuz.

A = [0, ∞)

B = [5, ∞)

$f^{-1}(x) = \frac{(x-5)^2}{4}$

$A = [0, \infty)$ $B = [5, \infty)$

$2\sqrt{x} + 5 = y$

$2\sqrt{x} = y-5 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{y-5}{2}$

$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-5}{2}\right)^2 = \frac{(x-5)^2}{4}$

5. f: $[3, \infty) \to [-2, \infty)$

$f(x) = \sqrt{x+a} - 2$

fonksiyonu veriliyor.

f fonksiyonunun tersi de bir fonksiyon olduğuna göre,

a. **a kaçtır?**

b. **$f^{-1}(x) = ?$**

a) −3

b) $f^{-1}(x) = (x+2)^2 + 3$

$f(3) = \sqrt{3+a} - 2 = -2$

$\sqrt{3+a} = 0 \Rightarrow a = -3$

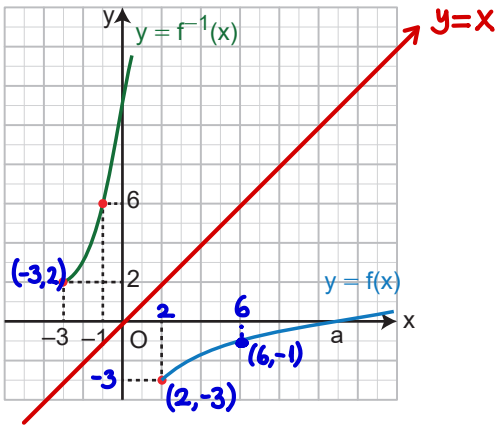
$\sqrt{x-3} - 2 = y \Rightarrow \sqrt{x-3} = y+2$

$x-3 = (y+2)^2$

$x = (y+2)^2 + 3$

$f^{-1}(x) = (x+2)^2 + 3$

6. Aşağıdaki karekök referans fonksiyonundan türetilen y = f(x) fonksiyonu ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aynı analitik düzlemde verilmiştir.



DDD **Buna göre, a kaçtır?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

$f(x) = m.\sqrt{x-2} - 3$

$f(6) = m.2 - 3 = -1 \Rightarrow 2m = 2$

$m = 1$

$f(x) = \sqrt{x-2} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow x-2 = 9$

$x = 11$

Performans Değerlendirme

6. Fahrenheit (F) ve Santigrat (C°) birer sıcaklık birimidir.

$$F(C) = \frac{9}{5} \cdot C + 32$$

fonksiyonu Santigrat (C°) derecelerini Fahrenheit (F) derecelerine dönüştürmek için kullanılır.

Buan göre, $F^{-1}(C)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

AAA

A) $F^{-1}(C) = \frac{5}{9} \cdot (C - 32)$ ✓

B) $F^{-1}(C) = \frac{5}{9} \cdot (C + 32)$

C) $F^{-1}(C) = \frac{5}{9} \cdot C - 32$

D) $F^{-1}(C) = \frac{9}{5} \cdot C - 32$

E) $F^{-1}(C) = \frac{9}{5} \cdot (C - 32)$

$\frac{9}{5} \cdot C + 32 = y$

$\frac{9}{5} \cdot C = y - 32 \Rightarrow C = \frac{5}{9}(y - 32)$

$F^{-1}(C) = \frac{5}{9}(C - 32)$

7. $g: \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$

$$g(x) = \frac{1}{x + 2} - 1$$

olduğuna göre, $g^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

DDD

A) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x - 2} + 1$

B) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x - 2} - 1$

C) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x + 2} + 2$

D) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x + 1} - 2$ ✓

E) $g^{-1}(x) = \frac{1}{x - 1} + 2$

$\frac{1}{x+2} - 1 = y \Rightarrow \frac{1}{x+2} = y + 1$

$x + 2 = \frac{1}{y+1}$

$x = \frac{1}{y+1} - 2$

$g^{-1}(x) = \frac{1}{x+1} - 2$

8. $h: [3, \infty) \to [2, \infty)$

$$h(x) = (x - 3)^2 + 2$$

olduğuna göre, $h^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

BBB

A) $h^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} - 3$

B) $h^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 3$ ✓

C) $h^{-1}(x) = \sqrt{x - 3} - 2$

D) $h^{-1}(x) = \sqrt{x - 3} + 2$

E) $h^{-1}(x) = \sqrt{x + 2} - 3$

$(x-3)^2 + 2 = y$

$(x-3)^2 = y - 2 \Rightarrow |x-3| = \sqrt{y-2}$

$x - 3 = \sqrt{y-2}$

$x = \sqrt{y-2} + 3$

$h^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 3$

9. $k: [1, \infty) \to [-3, \infty)$

$$k(x) = \sqrt{x - 1} - 3$$

olduğuna göre, $k^{-1}(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisine eşittir?

CCC

A) $k^{-1}(x) = (x - 3)^2 + 1$

B) $k^{-1}(x) = (x - 3)^2 - 1$

C) $k^{-1}(x) = (x + 3)^2 + 1$ ✓

D) $k^{-1}(x) = (x + 3)^2 - 1$

E) $k^{-1}(x) = (x + 1)^2 + 3$

$\sqrt{x-1} - 3 = y \Rightarrow \sqrt{x-1} = y + 3$

$x - 1 = (y+3)^2$

$x = (y+3)^2 + 1$

$k^{-1}(x) = (x+3)^2 + 1$

AÇIL MATEMATİK

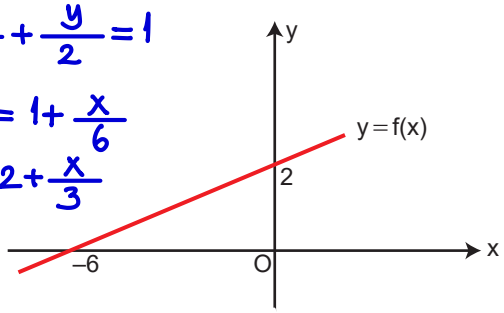
Performans Değerlendirme

1. Aşağıda y = f(x) doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\frac{x}{-6}+\frac{y}{2}=1$

$\frac{y}{2}=1+\frac{x}{6}$

$y=2+\frac{x}{3}$



Buna göre, y = f(x) fonksiyonunun grafiğinin y = x doğrusuna göre simetriği olan y = g(x) doğrusunun belirttiği fonksiyonun cebirsel temsili aşağıdakilerden hangisidir?

BBB

A) g(x) = 2x – 6 B) g(x) = 3x – 6 C) $g(x) = \frac{x-6}{2}$

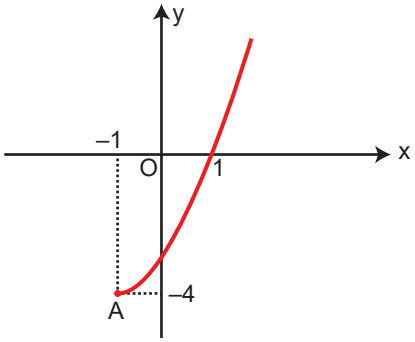
D) $g(x) = \frac{x+6}{2}$ E) g(x) = 3x + 6

$f(x)=\frac{x}{3}+2=y \Rightarrow \frac{x}{3}=y-2$

$x=3y-6$

$f^{-1}(x)=3x-6$

2. Aşağıda bir karesel fonksiyon grafiği verilmiştir.



A noktası fonksiyonun minimum noktasıdır. Buna göre, f fonksiyonunun tersi olan fonksiyonun cebirsel temsili aşağıdakilerden hangisidir?

AAA

A) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} - 1$ B) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} + 7$

C) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4} - 1$ D) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4} + 1$

E) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 4$

$f(x)=a.(x+1)^2-4$ $f(1)=4a-4=0$

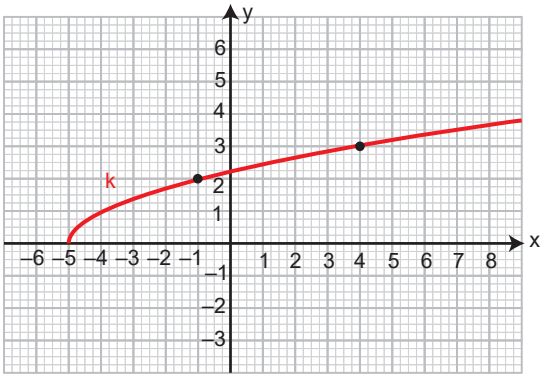
$a=1$

$(x+1)^2-4=y \Rightarrow (x+1)^2=y+4$

$x=\sqrt{y+4}-1$

$f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}-1$

3. Aşağıda $f(x) = a \cdot \sqrt{x+b}$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun cebirsel temsili aşağıdakilerden hangisine eşittir?

DDD

$f(x)=a.\sqrt{x+5}$

$f(-1)=2a=2 \Rightarrow a=1$

$\sqrt{x+5}=y \Rightarrow x+5=y^2$

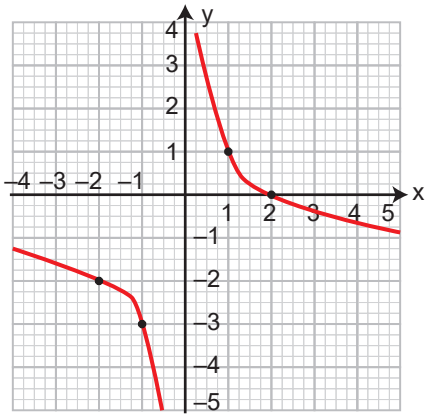
$x=y^2-5$

$f^{-1}(x)=x^2-5$

4. Aşağıda tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$ olan

$$f(x) = \frac{a}{x} + b$$

fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $f^{-1}(x)$ fonksiyonunun cebirsel temsili aşağıdakilerden hangisidir?

EFF

$f(1)=a+b=1$

$+\ f(-1)=-a+b=-3$

$2b=-2 \Rightarrow b=-1,\ a=2$

$f(x)=\frac{2}{x}-1=y \Rightarrow \frac{2}{x}=y+1$

$x=\frac{2}{y+1}$

$f^{-1}(x)=\frac{2}{x+1}$

AÇIL MATEMATİK