

TOPLAMA YOLUYLA SAYMA

Ortak elemana sahip olmayan farklı iki nesne grubunun eleman sayısını toplayarak bulma işlemine **toplama yoluyla sayma** denir.

Örnek 1

Bir çocuk piknikte sadece bir tür sandviç yiyecektir. Yanında 4 farklı peynirli, 3 farklı sebzelı, 2 farklı etli sandviç vardır.

Bu çocuk, kaç farklı sandviç arasından seçim yapabilir?

Çözüm

Sandviçler birbirinden tamamen farklı. Aynı anda birden fazla sandviç seçilmeyecek, tek bir sandviç seçilecek. Bu yüzden bu tür durumda her grubun eleman sayısı toplanarak toplam durum bulunur.

$$\text{Toplam sandviç sayısı} = \text{Peynirli} + \text{Sebzelı} + \text{Etli}$$

$$4 + 3 + 2 = 9 \text{ olur.}$$

Örnek 2

Bir gruptaki kişi sayıları aşağıda verilmiştir.

	Öğrenci	Öğretmen
Kadın	x	x + 1
Erkek	y	y + x

Bu grupta bir öğrenci seçimi için 10, bir kadın seçimi için 17 farklı seçenek vardır.

Buna göre, bir erkek seçimi için kaç farklı seçenek olur?

Çözüm

Grupdaki toplam öğrenci sayısı $x + y$, toplam kadın sayısı ise $x + x + 1$ yani $2x + 1$ dir.

Bir öğrenci seçimi için 10, bir kadın seçimi için 17 seçenek olduğundan,

$$x + y = 10$$

$$2x + 1 = 17 \text{ dir.}$$

Buradan, $x = 8$ ve $y = 2$ olur.

Grupdaki toplam erkek sayısı,

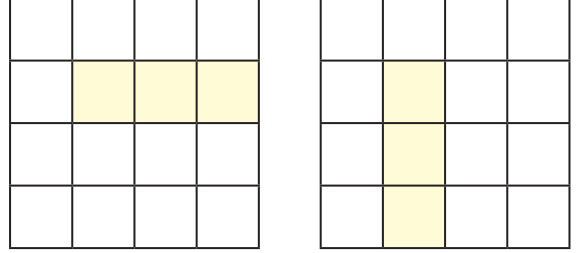
$$y + y + x = 2y + x = 12 \text{ olur.}$$

12 erkek arasından 1 erkeği 12 farklı şekilde seçebiliriz.

Cevabımız 12'dir.

Örnek 3

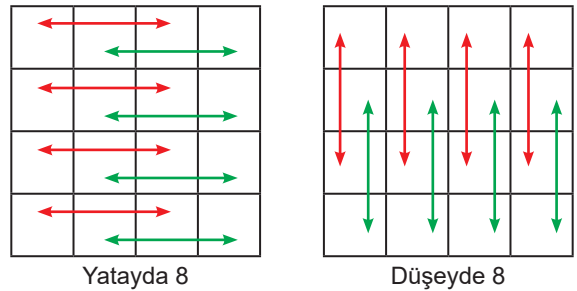
Aşağıda gösterilen tablo 16 birim kareden oluşmaktadır.



Mehmet, tablodaki birim karelerden 3 tanesini boyayacaktır. Boyayacağı birim kareler, yan yana 3 birim kare veya üst üste 3 birim kare olacaktır.

Buna göre, Mehmet boyama işlemini kaç farklı şekilde yapabilir?

Çözüm



Yatayda 8

Düşeyde 8

$8 + 8 = 16$ farklı şekilde boyama yapılabilir.

ÇARPMA YOLUYLA SAYMA

Ortak elemana sahip olmayan farklı iki nesne grubundan birer eleman seçerek oluşturulan ikililerin sayısını çarparak bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** denir.

Örnek

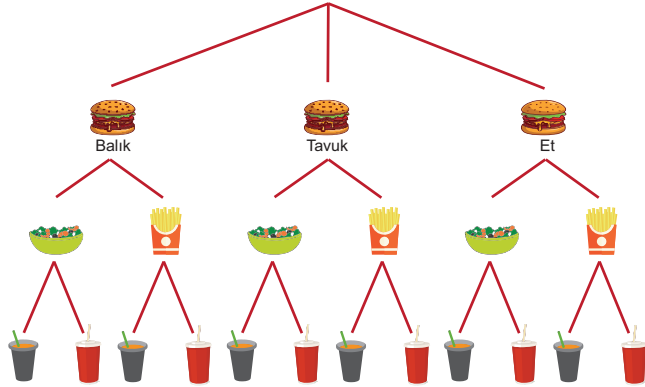
Bir hamburgercide et, tavuk, balık olmak üzere üç çeşit hamburger, garnitür olarak patates ile salata ve içecek olarak ta kola ile meyve suyu bulunmaktadır.

Hamburgerciye giden Zeynep bir hamburger, bir garnitür ve bir içecek seçecektir.

Buna göre, Zeynep'in kaç farklı seçeneği vardır?

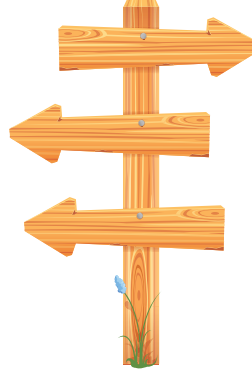
Çözüm

Aşağıda Zeynep'in tüm seçeneklerinin gösterildiği bir ağaç diyagramı çizilmiştir.



Bu durumda, çarpma yoluyla saymadan Zeynep'in $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ farklı seçeneğinin olduğu bulunmuş olur.

Örnek

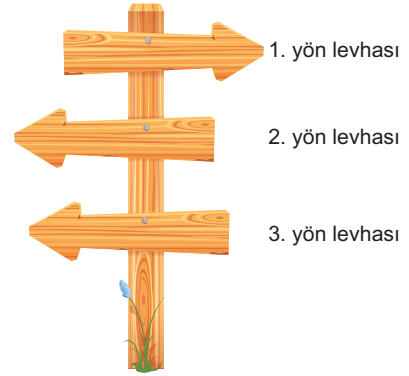


Yanda birbirinin aynısı 3 tane ahşap yön levhası gösterilmiştir. Yön levhaları sağ ve solu göstermektedir.

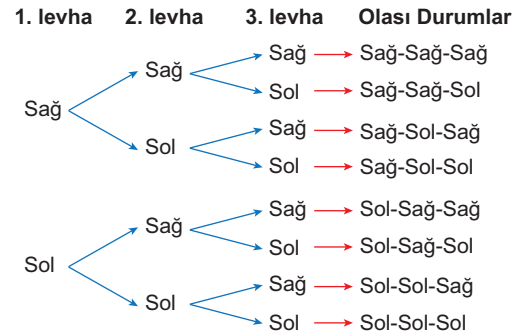
Bu levhalarla kaç farklı görüntü oluşturabilir?

8

Çözüm



Olası tüm durumları bulmak için çizge yöntemini kullanalım.



Buradan;

- 1. levha için 2
- 2. levha için 2
- 3. levha için 2

durum olduğundan çarpma yoluyla saymadan $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ farklı görüntü olduğu görülür.

n FARKLI NESNEDEN r TANESİNİN SIRALAMA SAYISINI BULMA

n ve r birer doğal sayı ve $n \geq r$ olmak üzere, n tane elemanın r'li sıralanışına n'nin r'li permütasyonu denir ve $P(n, r)$ şeklinde gösterilir.

$$P(n, r) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - r + 1)$$

Örneğin; $P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3$

$P(8, 2) = 8 \cdot 7$ dir.

Örnek

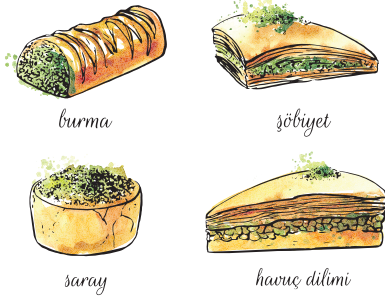
4 öğrenci yan yana duran 7 koltuğa kaç farklı şekilde oturabilir?

Çözüm

1. öğrencinin oturabileceği 7,
2. öğrencinin oturabileceği 6,
3. öğrencinin oturabileceği 5 ve
4. öğrencinin oturabileceği 4 yer vardır.

Cevabımız; $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = P(7, 4) = 840$ olur.

1.



Bir tatlıcıda bulunan burma, şöbiyet, saray ve havuç dilimi olmak üzere 4 farklı baklava çeşidi yukarıdaki görselde gösterilmiştir.

Bu baklavalardan üçünü sipariş eden biri, siparişini kaç farklı sırayla yiyebilir?

24

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = P(4, 3) \\ = 24$$

2. Elif, oluşturacağı üç harften oluşan bir şifre için "ACİL" kelimesinin harflerini kullanacaktır.

Zeynep, bu şifre için oluşturduğu üçlü harf gruplarından bazılarını aşağıdaki gibi yazmıştır.

ACL, ALC, LİC, ...

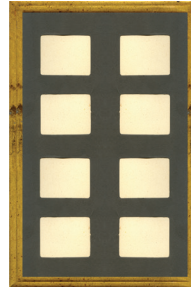
Buna göre, Elif kaç tane daha üçlü grup yazarsa olası tüm şifreleri yazmış olur?

21

$$P(4, 3) - 3 = 24 - 3 = 21$$

↓
Yazdıkları

3.



336

Murat, elinde bulunan 3 farklı fotoğrafı yukarıda gösterilen 8 fotoğraflık albüme, her boş yere en fazla bir fotoğraf koymak şartıyla kaç farklı şekilde yerleştirilebilir?

$$P(8, 3) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \\ = 336$$

4. Bir şehirde düzenlenecek olan müzik festivaline 5 farklı müzik grubu (A, B, C, D, E) davet edilmiştir.

Festival boyunca her akşam 3 farklı müzik grubu, sahneye çıkış sıraları da farklı olacak şekilde sahne alacaktır.

Aşağıda ilk iki akşamın grupları örnek olarak verilmiştir.

Akşam	1. Grup	2. Grup	3. Grup
I	A	B	C
II	A	C	B
III	...	...	...

Buna göre, festival en fazla kaç akşam sürebilir?

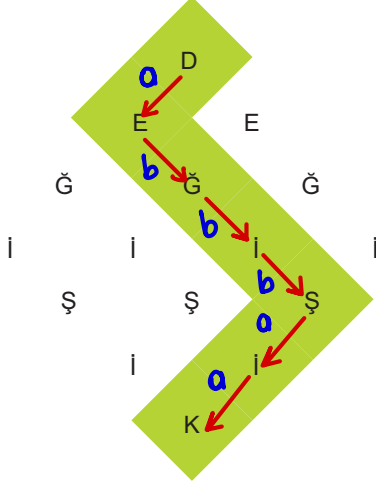
60

$$P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

İÇİNDE ÖZDEŞ NESNELERİN BULUNDUĞU TOPLULUĞUN
SIRALANMASI (TEKRARLI PERMÜTASYON)

NOTLAR

1.



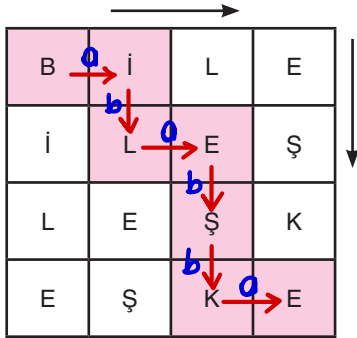
Şekilde yukarıdan aşağıya doğru harfler takip edilerek kaç farklı yolla "DEĞİŞİK" kelimesi okunabilir?

20

a a a b b b

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

2.



Şekilde soldan sağa veya aşağı doğru ilerleyerek kaç farklı yolla "BİLEŞKE" kelimesi okunabilir?

(Pembe renklerle bir örnek gösterilmiştir.)

20

a a a b b b

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

n TANE FARKLI NESNE ARASINDAN r TANE FARKLI NESNENİN SEÇİM SAYISININ BELİRLENMESİ (KOMBİNASYON)

Ayşe, telefonundaki uygulamayı kullanarak dondurma siparişi vermek istemektedir. Uygulama, Ayşe'nin seçebileceği dört farklı dondurma aroması sunmaktadır.

- Çilek
- Vanilya
- Çikolata
- Muz

Ayşe, her siparişinde iki farklı aroma seçmek zorundadır.

Aroma Sıralama Tablosu (Permütasyon)

1. Aroma	2. Aroma
Çilek	Vanilya
Vanilya	Çilek
Çilek	Çikolata
Çikolata	Çilek
Çilek	Muz
Muz	Çilek
Vanilya	Çikolata
Çikolata	Vanilya
Vanilya	Muz
Muz	Vanilya
Çikolata	Muz
Muz	Çikolata

$$P(4,2) = 4 \cdot 3 = 12$$

Ayşe, aromaların sırasına göre seçim yaparsa 12 farklı durum elde edebilir.

Ayşe'nin 4 aromadan 2'sini seçtiği durumda sıra önemli değilse, örneğin; "Çilek-Vanilya" ile "Vanilya-Çilek" aynı kabul ediliyorsa, bu kombinasyon olur.

Bu 12 durum içinde her çiftin yer değiştirmiş hali de var:

"Çilek-Vanilya" ve "Vanilya-Çilek" aslında aynı kombinasyon.

Yani her 2'li grup, 2 farklı sıralamayla sayılmış olur.

İşte bu yüzden:

$$\text{Kombinasyon sayısı} = \frac{P(4,2)}{2!} = \frac{12}{2} = 6$$

2! ile bölmek, sıralaması farklı ama anlamca aynı olan tekrarları temizler ve sadece farklı seçimleri (kombinasyonları) bulmamızı sağlar.

Bu durumda; Ayşe 4 çeşit aromalı dondurmadan 2 çeşit aromalı dondurmayı 6 farklı şekilde seçmiş olur.

1. Aroma	2. Aroma
Çilek	Vanilya
Çilek	Çikolata
Çilek	Muz
Vanilya	Çikolata
Vanilya	Muz
Çikolata	Muz

A kümesinin r elemanlı alt kümelerinin her birine

A kümesinin r'li kombinasyonu denir.

$n, r \in \mathbb{N}, n \geq r$ olmak üzere, n elemanlı bir A kümesinin r'li

kombinasyonlarının sayısı $C(n,r)$ ya da $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

$$C(n,r) = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)}^{r \text{ tane}}}{r!}$$

Kombinasyon sayısı hesaplanırken kümenin elemanlarının sıralama sayısı değil kümenin elemanlarının oluşturduğu grup sayısı önemlidir.

$\binom{n}{r}$ ifadesi "n elemanlı bir kümeden r elemanlı kaç farklı grup seçebiliriz." demektir.

n tane farklı nesne içerisinde r tane farklı nesnenin seçimi için önce n tane nesnenin r'li sıralanışının sayısı bulunur. Bulunan değer r tane nesnenin farklı sıralanışlarının sayısına bölünür.

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} \text{ dir.}$$

Örneğin;

6 kişilik bir gruptan 3 kişi kaç farklı şekilde seçilir?

- 6 kişinin 3'lü sıralanışlarının sayısı: $6 \cdot 5 \cdot 4$
- 3 kişinin farklı sıralanışlarının sayısı: $3!$

$$C(6,3) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20 \text{ olur.}$$

KOMBİNASYON ÖZELLİKLERİ

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$ dir.
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ dir.
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$ dir.
- $\binom{n}{r} = \binom{n}{k}$ ise $r = k$ veya $r + k = n$ dir.

n TANE FARKLI NESNE ARASINDAN r TANE FARKLI NESNENİN SEÇİM SAYISININ BELİRLENMESİ (KOMBİNASYON)

1. 6 erkek 7 kadın arasından 2'si erkek ve 3'ü kadın olmak üzere, toplam 5 kişi kaç farklı şekilde seçilebilir?

525

$$\binom{6}{2} \cdot \binom{7}{3} = 15 \cdot 35 = 525$$

2. 5 mühendis ve 4 doktorun olduğu bir toplulukta en fazla 2 mühendisin olduğu 4 kişilik bir ekip kaç farklı yolla seçilebilir?

81

$$\binom{4}{4} \cdot \binom{5}{0} + \binom{4}{3} \cdot \binom{5}{1} + \binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2}$$

0 Mühendis 1 Mühendis 2 Mühendis

$$1 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 6 \cdot 10 = 81$$

3. Bir apartmanda dört aile yaşamakta olup bu ailelerin ikisinde 2'şer kişi ve diğer ikisinde 4'er kişi vardır. Bu dört aileden 2 kişi seçilecektir.

Seçilen kişiler aynı aileden olamayacağına göre, kaç farklı seçim yapılabilir?

52

$$\binom{12}{2} - \binom{2}{2} \cdot 2 - \binom{4}{2} \cdot 2$$

$$66 - 2 - 6 \cdot 2 = 66 - 14 = 52$$

4. Her katta bir dairesi olan 10 katlı bir apartmanın 7 dairesini satın almak isteyen bir kişi son kattaki daireyi alırsa bir alt kattaki daireyi de almak zorundadır.

Buna göre, bu kişi satın alma işlemini kaç farklı şekilde gerçekleştirebilir?

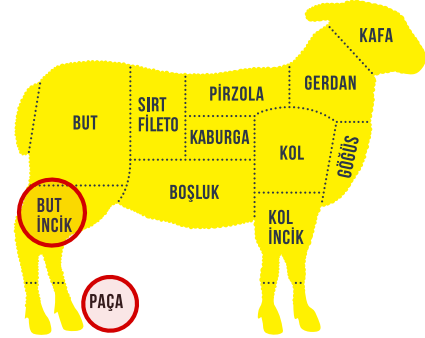
92

son katı alsın. $\rightarrow \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56$

son katı olmasın $\rightarrow \binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$

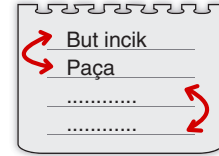
$$56 + 36 = 92$$

5.



Bir kasap reyonuna gelen müşteri, yukarıda bölümleri gösterilen kuzunun 4 farklı bölümünden sipariş etmiştir.

ikisi belli



geriye kalan 10 bölümden 2 si seçilecek

Müşterinin sipariş kağıdının bir bölümü yukarıda gösterilmiştir.

Buna göre, müşteri siparişi kaç farklı şekilde yapmış olabilir? (Listedeki siparişlerin sıralaması önemli değildir.)

45

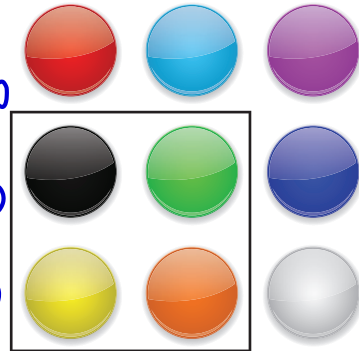
$$\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

6.

$$\binom{4}{0} \cdot \binom{5}{2} = 10$$

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1} = 20$$

$$10 + 20 = 30$$



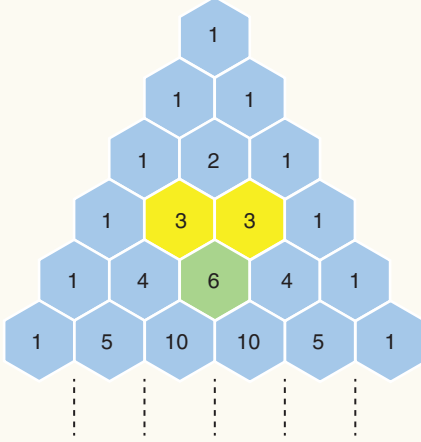
Yukarıda gösterilen 9 farklı renkteki camlardan 2 tanesi seçilecektir.

Siyah çerçeve içindeki camlardan en fazla 1 tane seçilebilmektedir.

Buna göre, camlar kaç farklı şekilde seçilebilir?

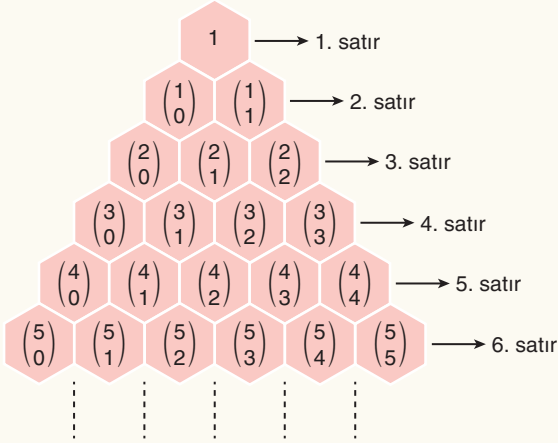
30

PASCAL ÜÇGENİ



- Pascal üçgeni, en üstte 1 sayısı ile başlar ve diğer satırların da tamamı 1 ile başlayıp 1 ile biter.
- Her satırda bulunan eleman sayısı bir üstteki satırın eleman sayısından 1 fazladır.
- Her satırda satırın başında ve sonunda bulunan 1 sayıları hariç, geri kalan sayılar bir üst satırda kendisine komşu olan iki sayının toplamına eşittir.
Örneğin; yeşil renkle gösterilen 6 sayısı üst satırda kendisine komşu olan iki tane sarı renkli 3 sayısının toplamına eşittir.

Pascal üçgeninde bulunan sayıları kombinasyon ile ilişkili bir biçimde yazarsak, aşağıdaki görüntü oluşur.



Örneğin;

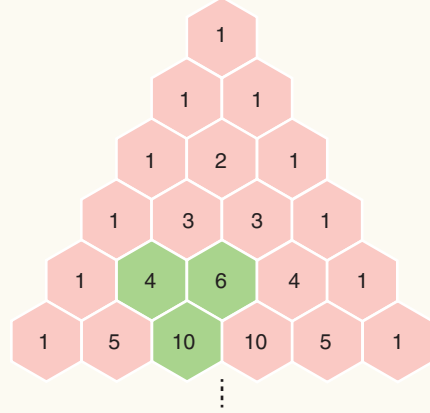
Pascal üçgenindeki 5. satırda bulunan sayıların toplamı

$$= \binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16 \text{ olur.}$$

Genelleyecek olursak;

$$n. \text{ satırdaki tüm sayıların toplamı} = 2^{n-1} \text{ olur.}$$

Örneğin;



Yan yana duran 2 sayının toplamı bir altta her iki sayıya da komşu olan sayı olduğundan,

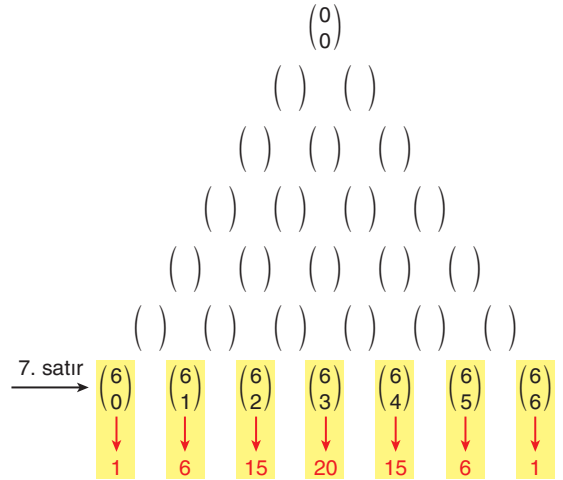
$$4 + 6 = 10 \text{ olduğundan, } \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2} \text{ olur.}$$

Genelleyecek olursak,

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \text{ bulunur.}$$

Örnek

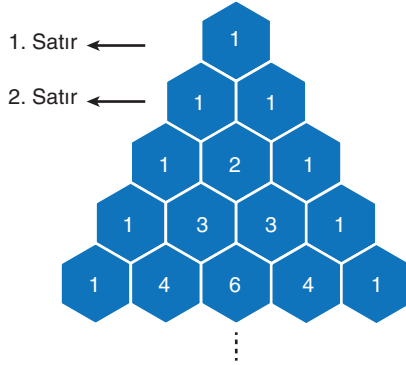
Pascal üçgeninin yedinci satırında bulunan en büyük sayı kaçtır?



Cevap 20 dir.

PASCAL ÜÇGENİ

1.



GÜVERCİN YUVASI İLKESİ

Örnek 2

Bir çekmecede:

- 5 çift siyah çorap,
- 7 çift kırmızı çorap ve
- 10 çift beyaz çorap bulunmaktadır.

Renklerine bakmadan çekme işlemi yapılacaktır.

En az kaç çift çorap çekilmelidir ki, kesinlikle üç farklı renkten çorap çekilmiş olsun?

Çözüm

Önce en çok çiftin olduğu çorapları çekmeliyiz.

$$\begin{array}{r} 10 + 7 = 17 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{Beyaz} \quad \text{Kırmızı} \end{array}$$

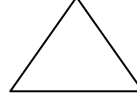
17 çift çorap çektiğimizde en kötü ihtimalle tüm beyaz ve kırmızı çorapları çekmiş oluruz. Dikkat edilirse içlerinde siyah çorap yok. Bu durumda üç renkten de kesinlikle çorap çekmek için

$$10 + 7 + 1 = 18 \text{ çift}$$

çorap çekilmelidir.

Örnek 3

Aşağıda bir kenar uzunluğu 1 birim olan eşkenar üçgen verilmiştir.



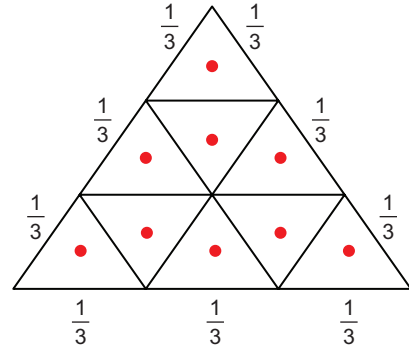
10 nokta bu eşkenar üçgenin içersine yerleştirilecektir.

Buna göre, üçgenin iç bölgesinden alınan 10 noktadan aralarındaki uzaklık kesinlikle $\frac{1}{3}$ birimden küçük olan iki nokta olduğunu gösteriniz.

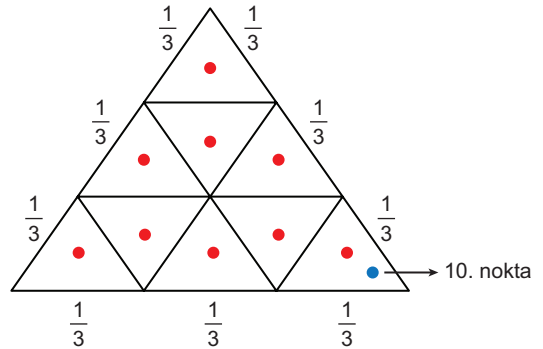
Çözüm

Verilen üçgeni 9 tane küçük eşkenar üçgene ayıralım.

Bu durumda her küçük eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğu $\frac{1}{3}$ birim olur.

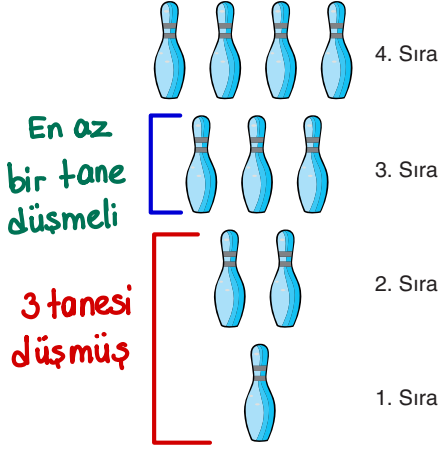


10 noktadan 9 tanesini her bir eşkenar üçgenin içersine 1 nokta gelecek biçimde yerleştirirsek 10. noktayı da yerleştirdiğimizde bir üçgenin içersinde 2 nokta olacak.



Bu durumda kırmızı ve mavi noktalar arası uzaklığın $\frac{1}{3}$ 'ten küçük olduğu görülür.

6. Aşağıda bowling oyununda kullanılan 10 tane labut görseli verilmiştir.



Bir oyuncu yaptığı bir atışta 1. ve 2. sıradaki tüm labutları düşürmüştür.

Oyuncunun 3. sırada en az bir labut düşürdüğü bilindiğine göre, oyuncu toplamda 6 labutu kaç farklı biçimde düşürebilir?

- D A) 15 B) 16 C) 21 ☒ D) 31 E) 41

$$\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{2} + \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} + \binom{3}{3} \cdot \binom{4}{0}$$

$$3 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1$$

$$18 + 12 + 1 = 31$$

7.



Yukarıda 5 bölümden oluşan bir elbise dolabı gösterilmiştir.

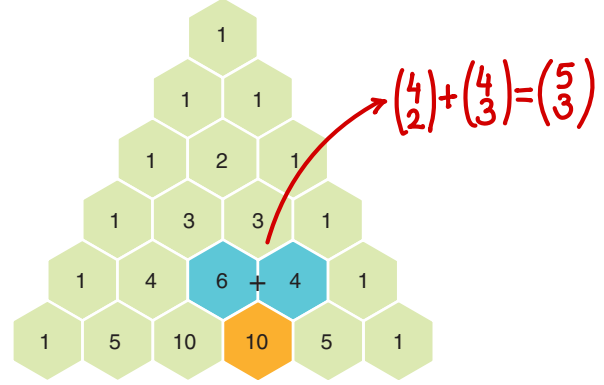
Emine, elindeki 3 farklı elbiseyi askılarına takarak dolabın herhangi bir bölümündeki beyaz çubuğa dizecektir.

Elbiselerin tamamı aynı bölüme konulacağına göre, elbiseler kaç farklı şekilde dizilebilir?

- C A) 15 B) 24 ☒ C) 30 D) 40 E) 45

$$\binom{5}{1} \cdot 3! = 5 \cdot 6 = 30$$

8.



Yukarıda Pascal üçgeninin bir özelliği verilmiştir.

Bu özellikten faydalanılırsa

$$\binom{12}{4} + \binom{12}{5}$$

toplamının sonucu kaç bulunur?

- C A) $\binom{12}{6}$ B) $\binom{13}{4}$ ☒ C) $\binom{13}{5}$ D) $\binom{13}{6}$ E) $\binom{14}{5}$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

$$\binom{12}{4} + \binom{12}{5} = \binom{13}{5}$$

9. Bir odada 4 avukat, 3 mühendis, 2 idari personel ve 1 denetçi olmak üzere 10 kişi vardır.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- D A) Rastgele 4 kişi seçilirse, 2'si avukat olur.
B) Rastgele 5 kişi seçilirse, en az bir mühendis olur.
C) Rastgele 6 kişi seçilirse, farklı mesleklerden insanlar seçilmiş olur.
D) Rastgele 7 kişi seçilirse, en az bir avukat olur.
E) Rastgele 8 kişi seçilirse, en az bir idari personel olur.

En kötü durumda $3+2+1=6$ kişi seçilir ise hiç avukat olmaz. Ama 7 kişi seçilir ise en az biri avukat olur.

