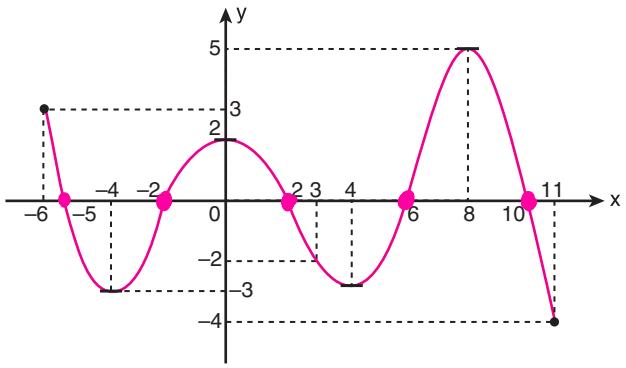
Etkinlik 1

Aşağıda, [–6, 11] aralığında tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Grafiğe göre fonksiyonun,

a) Eksenleri kestiği noktaları,

b) Pozitif ve negatif değer aldığı aralıkları,

c) Artan ve azalan olduğu aralıkları,

d) Maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

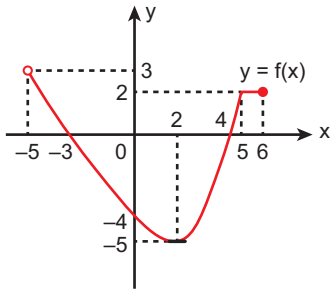
a) x eksenini (–5, 0), (–2, 0), (2, 0), (6, 0), (10, 0) noktalarında keser. y eksenini (0, 2) noktasında keser.
b) [–6, –5) ∪ (–2, 2) ∪ (6, 10) aralıklarında pozitif, geriye kalan aralıklarda negatif değer alır.
c) [–6, –4], [0, 4], [8, 11] aralıklarında azalan, [–4, 0], [4, 8] aralıklarında artandır.
d) Maksimum değer : 5
Minimum değer : –4

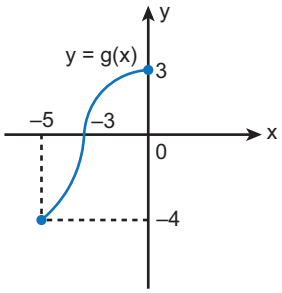
CEVAP

	f Fonksiyonu	g Fonksiyonu
Tanım Kümesi	(–5, 6]	[–5, 0]
Görüntü Kümesi	[–5, 3)	[–4, 3]
Fonksiyonun Sıfırları	–3 ve 4	–3
Pozitif Olduğu Aralıklar	(–5, –3) ∪ (4, 6]	(–3, 0]
Negatif Olduğu Aralıklar	(–3, 4)	[–5, –3)
Artan Olduğu Aralıklar	[2, 5]	[–5, 0]
Azalan Olduğu Aralıklar	(–5, 2]	Yok
Maksimum Noktası	Yok	(0, 3)
Minimum Noktası	(2, –5)	(–5, –4)
Örten Olma Durumu	Örten değil	Örten değil
Bire Bir Olma Durumu	Bire bir değil	Bire bir

Etkinlik 2

Aşağıda değer kümeleri reel sayılar olan f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.





f ve g fonksiyonlarının grafiklerine göre tablodaki ilgili yerleri doldurunuz.

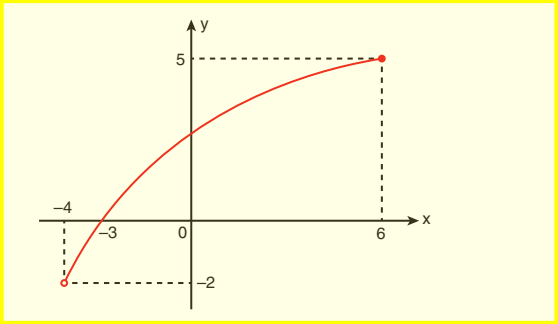
	f Fonksiyonu	g Fonksiyonu
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
Fonksiyonun Sıfırları		
Pozitif Olduğu Aralıklar		
Negatif Olduğu Aralıklar		
Artan Olduğu Aralıklar		
Azalan Olduğu Aralıklar		
Maksimum Noktası		
Minimum Noktası		
Örten Olma Durumu		
Bire Bir Olma Durumu		

Etkinlik 5

1. Aşağıda bir g fonksiyonuna ait bazı nitel özellikler verilmiştir.

- Tanım kümesi (–4, 6], görüntü kümesi (–2, 5] dir.
- g fonksiyonunun sıfırı –3'tür.
- g artan bir fonksiyondur.
- g bire birdir.

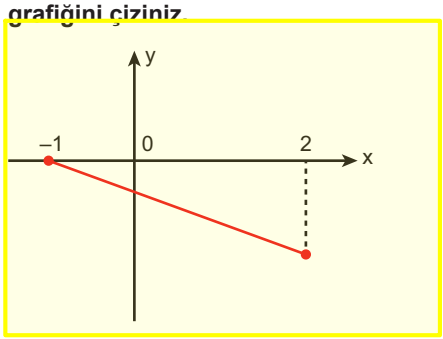
Buna göre, yukarıdaki şartlara uygun bir g fonksiyonlarından birinin grafiğini çiziniz.



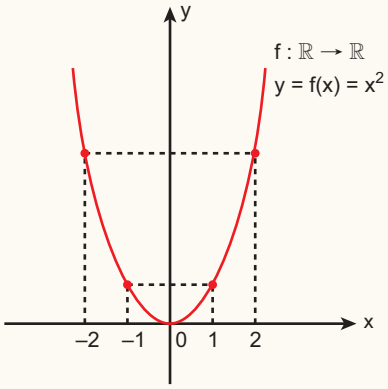
2. [–1, 2] aralığında tanımlı bir f fonksiyonu için aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

- f fonksiyonu azalandır.
- f fonksiyonunun maksimum değeri sıfırdır.

Buna göre, bu şartı sağlayan f fonksiyonlarından birinin grafiğini çiziniz.



KARESEL REFERANS FONKSİYONUNUN NİTEL ÖZELLİKLERİ $f(x) = x^2$



x	...	–3	–2	–1	0	1	2	3	...
f(x)	...	9	4	1	0	1	4	9	...

a) Tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

b) Görüntü Kümesi $\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ olduğundan; G.K = $[0, \infty)$ dır.

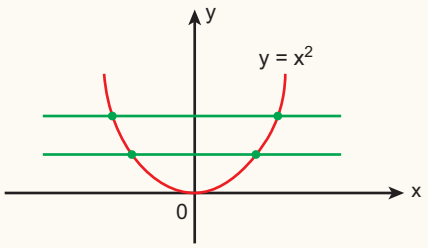
c) $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ aralığında $f(x) > 0$ dır.

d) f fonksiyonu; $(-\infty, 0]$ aralığında azalan, $[0, \infty)$ aralığında artandır.

e) f fonksiyonunun minimum noktası (0, 0) olup minimum değeri sıfırdır. f fonksiyonunun maksimum değeri yoktur.

f) $f(0) = 0$ olduğundan f fonksiyonunun sıfırı sıfırdır.

g)



f fonksiyonunun grafiğinde x eksenine paralel çizilen doğrular grafiği iki noktada kestiğinden
Örneğin; $f(-1) = f(1) = 1$ olduğundan fonksiyon bire bir değildir.

h) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2$ ve $f(-x) = (-x)^2 = x^2$
$f(x) = f(-x)$ olduğundan f çift fonksiyondur. Ayrıca $y = x^2$ fonksiyonunun y eksenine göre simetrik olduğu görülüyor.

i) $f(x) = x^2$ fonksiyonunun örten olması için f fonksiyonunun değer kümesi ile görüntü kümesinin birbirine eşit olması gerekir.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Değer Kümesi)
Görüntü Kümesi : $[0, \infty)$

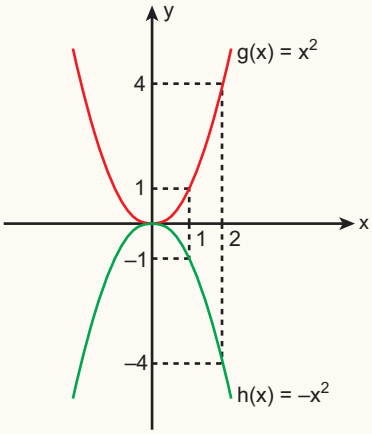
D.K $\neq$ G.K

olduğundan f fonksiyonu örten değildir.

KARESEL REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN GERÇEK SAYILARDA TANIMLI $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ $(a, r, k, \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ KARESEL FONKSİYONUNUN NİTEL ÖZELLİKLERİ $f(x) = a \cdot x^2$ TİPİNDEKİ FONKSİYONLAR

x eksenine göre yansıma

$a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $y = ax^2$ karesel fonksiyonunda $a = -1$ ise karesel referans fonksiyonunun grafiğinde x eksenine göre yansıma dönüşümü uygulanır.



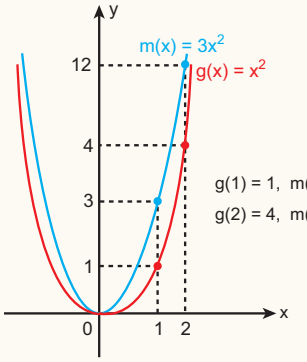
Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları
$f(x) = -x^2$	R	$(-\infty, 0]$	Pozitif	Artan	Maksimum
			—	$(-\infty, 0]$	(0,0)
			Negatif	Azalan	Minimum
			$(-\infty, 0)$	$[0, \infty)$	—

Fonksiyon	Sıfırları	Bire Birliği	Örtenliği	Tekliği-Çiftliği
$f(x) = -x^2$	0	Bire bir değil	örten değil	Çift

Dikey Daralma ve Genişleme

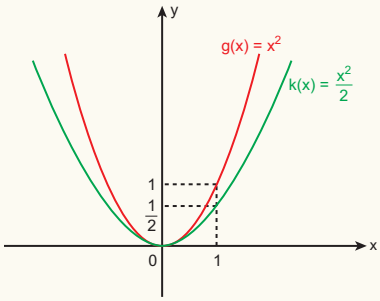
$a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere, $y = ax^2$ karesel fonksiyonunda $a > 0$ ise karesel referans fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktaların değerleri a katına çıkar.

- $a > 1$ ise $y = ax^2$ fonksiyonunun grafiği çizilirken karesel referans fonksiyonun grafiğine a kat dikey daralma dönüşümü uygulanmış olur.



Yanda verilen grafikte $m(x) = 3x^2$ karesel fonksiyonunun grafiği için $g(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonunun grafiğine 3 kat dikey daralma dönüşümü uygulanmıştır.

- $0 < a < 1$ ise $y = ax^2$ fonksiyonun grafiği çizilirken karesel referans fonksiyon grafiğine a kat dikey genişleme dönüşümü uygulanmış olur.

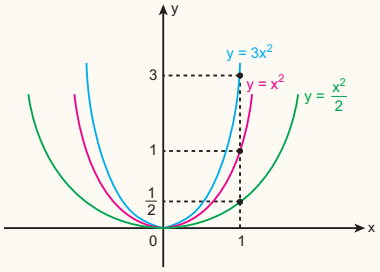


Yanda verilen grafikte $k(x) = \frac{x^2}{2}$ karesel fonksiyonunun grafiği için $g(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonun grafiğine 2 kat dikey genişleme dönüşümü uygulanmıştır.

Şimdi

$$y = \frac{x^2}{2},\ y = x^2 \text{ ve } y = 3x^2$$

karesel fonksiyonunun belirttiği grafikleri aynı analitik düzlemde gösterelim.



Yanda verilen grafikler incelendiğinde $y = ax^2$ $(a > 0)$ a değeri büyüdükçe parabolün kollarının kapandığı küçüldükçe de açıldığı görülür.

KARESEL REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN GERÇEK SAYILARDA TANIMLI $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ $(a, r, k, \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ KARESEL FONKSİYONUNUN NİTEL ÖZELLİKLERİ $f(x) = a \cdot (x - r)^2$ TİPİNDEKİ FONKSİYONLAR

$f(x) = a \cdot (x - r)^2$ TİPİNDEKİ FONKSİYONLAR

x Ekseninde Öteleme

$y = f(x + a)$ Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin.

a) $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $y = f(x - a)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenmiş halidir.

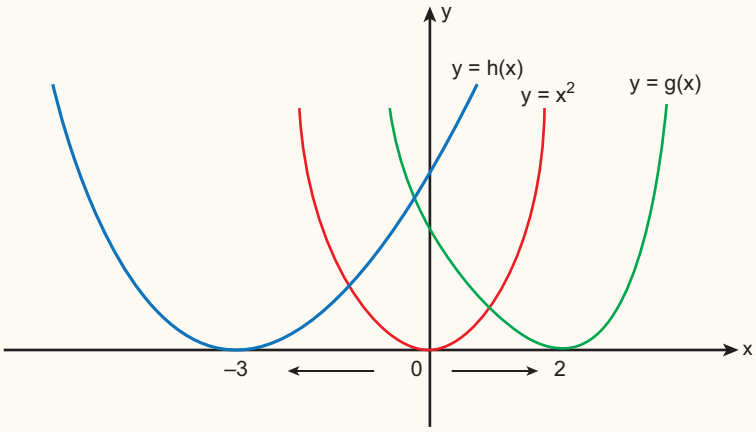
b) $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $y = f(x + a)$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde a birim ötelenmiş halidir.

Bir başka şekilde ifade edecek olursak $(x - a)$ ifadesini sıfıra eşitlediğimizde a sayısı pozitif ise pozitif yönde, negatif ise negatif yönde öteleriz.

Aşağıdaki grafikler için,

- Karesel referans fonksiyonunun grafiğine x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleme dönüşümü uygulanarak $h(x) = (x + 3)^2$
- Karesel referans fonksiyonunun grafiğine x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme dönüşümü uygulanarak $g(x) = (x - 2)^2$

fonksiyonları elde edilmiştir.



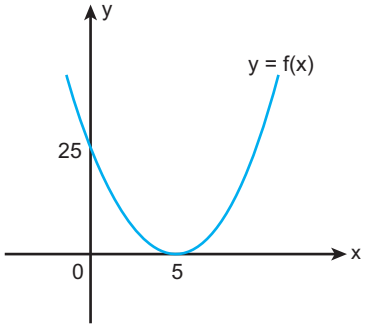
- $g(x) = (x - 2)^2$ fonksiyonu için referans fonksiyonunun tüm bağımsız değişkenlerinden 2 çıkarılmış,
- $h(x) = (x + 3)^2$ fonksiyonu için referans fonksiyonun tüm bağımsız değişkenlerine 3 eklenmiştir.

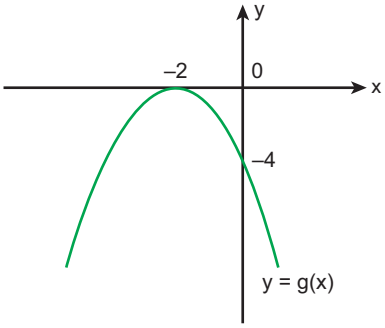
Örnek

Değer kümesi gerçek sayılar olan;

$$f(x) = (x - 5)^2 \text{ ve } g(x) = -(x + 2)^2$$

karesel fonksiyonların grafiklerini çizelim.





Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları	Sıfırları	Bire Birliği	Örtenliği	Tekliği-Çiftliği
$f(x) = (x - 5)^2$	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$	Pozitif	Artan	Maksimum	5	Bire bir değildir.	Örten değildir.	Ne tek Ne çift
			$\mathbb{R} - \{5\}$	$[5, \infty)$	Yoktur.				
			Negatif	Azalan	Minimum				
			Yoktur.	$(-\infty, 5]$	$(5, 0)$				
$g(x) = -(x + 2)^2$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0]$	Pozitif	Artan	Maksimum	–2	Bire bir değildir.	Örten değildir.	Ne tek Ne çift
			Yoktur.	$(-\infty, -2]$	$(-2, 0)$				
			Negatif	Azalan	Minimum				
			$\mathbb{R} - \{-2\}$	$[-2, \infty)$	Yoktur.				

KARESEL REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN GERÇEK SAYILARDA TANIMLI $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ $(a, r, k, \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ KARESEL FONKSİYONUNUN NİTEL ÖZELLİKLERİ $f(x) = ax^2 + k$ TİPİNDEKİ FONKSİYONLAR

$f(x) = ax^2 + k$ TİPİNDEKİ FONKSİYONLAR

y Ekseninde Öteleme

$y = f(x) + b$ Dönüşümü

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilsin.

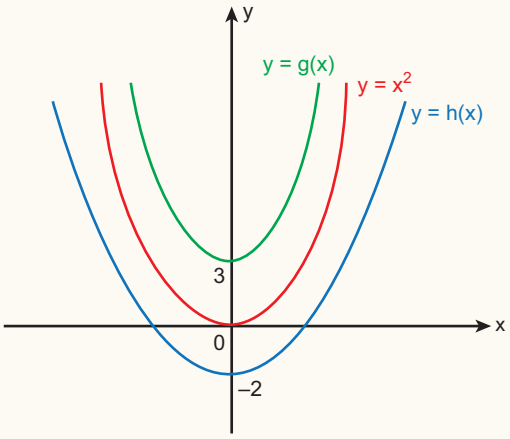
a) $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $y = f(x) + b$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmiş halidir.

b) $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $y = f(x) – b$ fonksiyonunun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde b birim ötelenmiş halidir.

Aşağıdaki grafikler için,

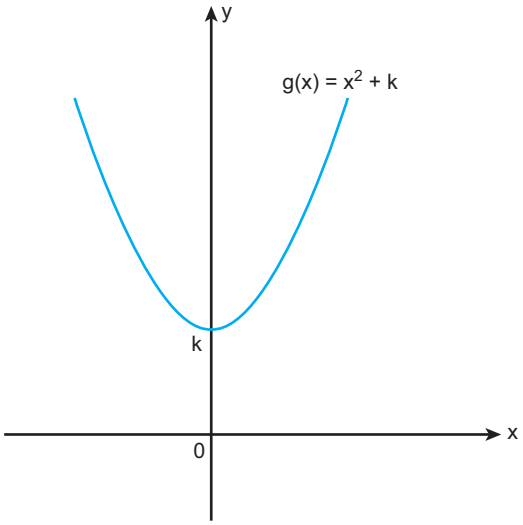
- Karesel referans fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme dönüşümü uygulanarak $g(x) = x^2 + 3$
- Karesel referans fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme dönüşümü uygulanarak $h(x) = x^2 – 2$

fonksiyonları elde edilmiştir.



- $g(x) = x^2 + 3$ fonksiyonu için karesel referans fonksiyonunun aldığı değerlere 3 eklenmiş,
- $h(x) = x^2 – 2$ fonksiyonu için karesel referans fonksiyonunun aldığı değerlerden 2 çıkarılmıştır.

NOT



$\forall x \in \mathbb{R}$ için $x^2 \geq 0$ olduğundan $x^2 + k \geq k$ olur.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = x^2 + k \geq k$ olacağından fonksiyonunun alabileceği en küçük değerin k olduğu görülür.

Örnek

Karesel referans fonksiyonu

- Önce y ekseninin negatif yönünde 4 birim öteleniyor.
- Sonra 3 kat dikeyde daralma dönüşümü uygulanıyor.
- Son olarakta x eksenine göre yansıma dönüşümü uygulanıyor.

Buna göre, son durumda oluşan fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

Çözüm

Karesel referans fonksiyonu $f(x) = x^2$ dir.

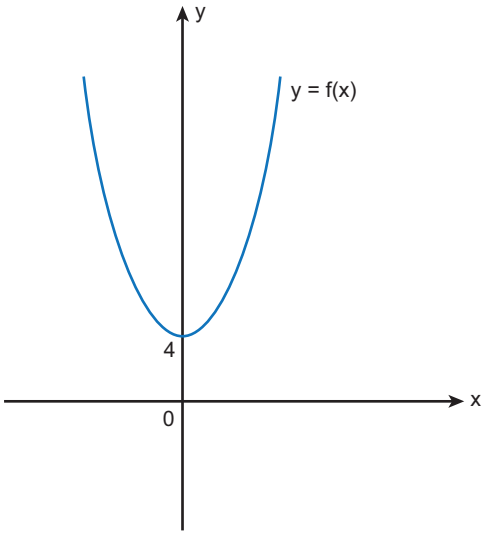
- Önce y ekseninin negatif yönünde 4 birim öteleniyor.
  $g(x) = x^2 – 4$
- Sonra 3 kat dikeyde daralma dönüşümü uygulanıyor.
  $h(x) = 3x^2 – 12$
- Son olarakta x eksenine göre yansıma dönüşümü uygulanıyor.
  $k(x) = 12 – 3x^2$ olur.

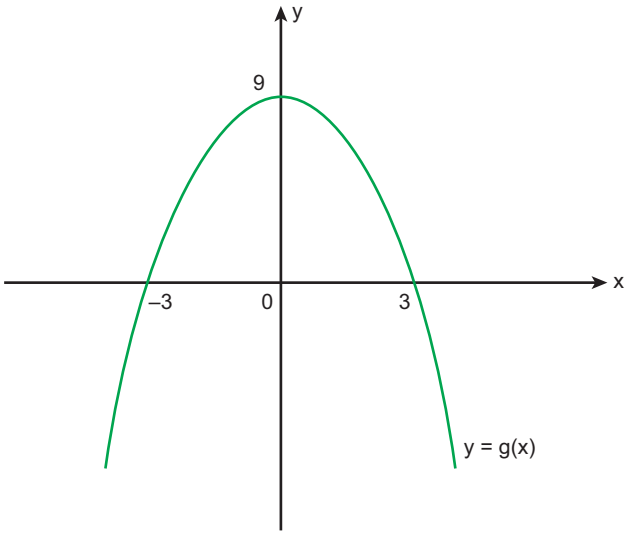
Örnek

Değer kümesi gerçek sayılar olan;

$$f(x) = 2x^2 + 4 \text{ ve } g(x) = 9 - x^2$$

karesel fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.





Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

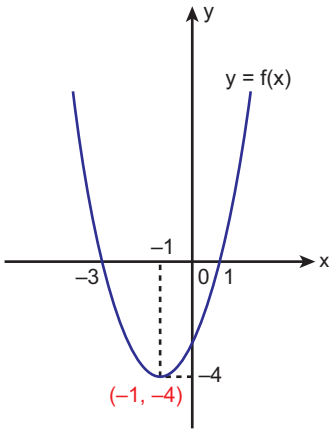
Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları	Sıfırları	Bire Birliği	Örtenliği	Tekliği-Çiftliği
$f(x) = 2x^2 + 4$	$\mathbb{R}$	$[4, \infty)$	Pozitif	Artan	Maksimum	Yok	Bire bir değildir.	Örten değildir.	Çift
			$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$	Yoktur.				
			Negatif	Azalan	Minimum				
			Yoktur.	$(-\infty, 0]$	$(0, 4)$				
$g(x) = 9 - x^2$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 9]$	Pozitif	Artan	Maksimum	–3, 3	Bire bir değildir.	Örten değildir.	Çift
			$(-3, 3)$	$(-\infty, 0]$	$(0, 9)$				
			Negatif	Azalan	Minimum				
			$\mathbb{R} - [-3, 3]$	$[0, \infty)$	Yoktur.				

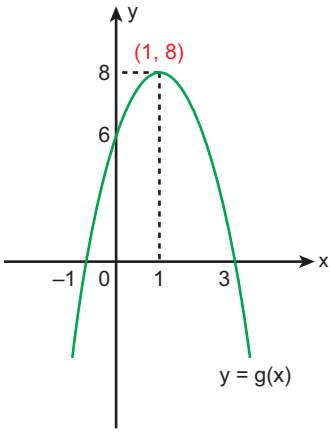
Örnek

Değer kümesi gerçek sayılar olan;

$$f(x) = (x + 1)^2 - 4 \text{ ve } g(x) = -2 \cdot (x - 1)^2 + 8$$

karesel fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.



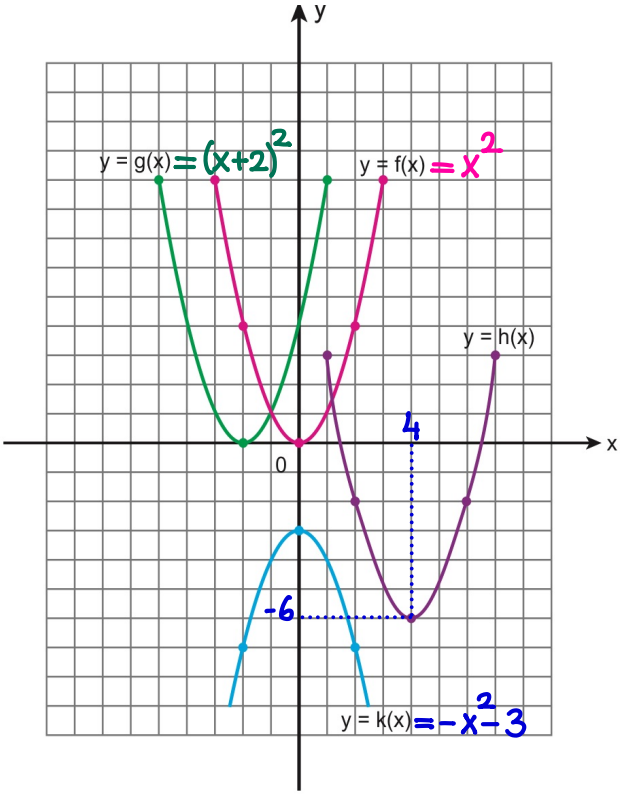


Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Maksimum-Minimum Noktaları	Sıfırları	Bire Birliği	Örtenliği	Tekliği-Çiftliği
$f(x) = (x + 1)^2 - 4$	$\mathbb{R}$	$[-4, \infty)$	Pozitif	Artan	Maksimum	–3, 1	Bire bir değildir.	Örten değildir.	Ne tek ne çift
			$\mathbb{R} - [-3, 1]$	$[-1, \infty)$	Yoktur.				
			Negatif	Azalan	Minimum				
			$(-3, 1)$	$(-\infty, -1]$	$(-1, -4)$				
$g(x) = -2(x - 1)^2 + 8$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 8]$	Pozitif	Artan	Maksimum	–1, 3	Bire bir değildir.	Örten değildir.	Ne tek ne çift
			$(-1, 3)$	$(-\infty, 1]$	$(1, 8)$				
			Negatif	Azalan	Minimum				
			$\mathbb{R} - [-1, 3]$	$[1, \infty)$	Yoktur.				

Etkinlik 2

Aşağıda f, g, h ve k karesel fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre; g, h ve k fonksiyonlarını f karesel referans fonksiyonu türünden yazınız.

$g(x) = (x+2)^2$
$h(x) = (x-4)^2 - 6$
$k(x) = -x^2 - 3$

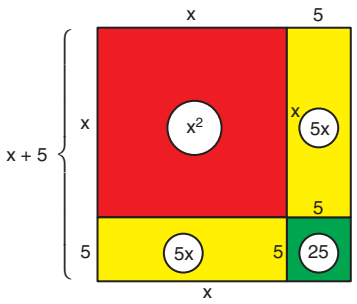
İKİNCİ DERECEDEN VERİLEN İFADELERİ TAMKARE İFADELERE DÖNÜŞTÜRMEK

- $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
- $x^2 - 2x = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2} - 1 = (x-1)^2 - 1$
- $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$
- $x^2 + 6x = \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{(x+3)^2} - 9 = (x+3)^2 - 9$
- $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$
- $x^2 - 4x + 6 = \underbrace{x^2 - 4x + 4}_{(x-2)^2} + 2 = (x-2)^2 + 2$
- $-x^2 + 10x - 25 = -\left(x^2 - 10x + 25\right) = -(x-5)^2$
- $2x^2 + 4x - 6 = 2(x^2 + 2x - 3) = 2\left((x+1)^2 - 4\right)$
  $= 2(x+1)^2 - 8$

NOT

Matematik biliminin bugünkü seviyesine gelmesinde önemli bir katkısı olan ve cebirin babası olarak anılan Harezmî'nin tam kareye tamamlama çözümünü geometrik olarak nasıl yaptığını görelim.

Harezmî $x^2 + 10x = 39$ denkleminin çözümünü geometrik olarak aşağıdaki gibi bulmuştur.



$x^2 + 10x = 39$ denklemini

$$x^2 + 5x + 5x = 39$$

şeklinde düzenleyelim.

$$\underbrace{x^2 + 5x + 5x}_{39} + 25 = (x+5)^2$$
$$39 + 25 = (x+5)^2$$
$$64 = (x+5)^2$$
$$8 = x + 5$$
$$x = 3 \text{ tür.}$$

Harezmî geometrik olarak çözüm getirdiği bu yöntemle sadece pozitif köklere ulaşmıştır.

İKİNCİ DERECEDEN VERİLEN İFADELERİ TAMKARE İFADELERE DÖNÜŞTÜRMEK

a, r, k, b ve c birer gerçek sayı, $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ şeklinde tamkareli formu verilen fonksiyonların genel denklemi

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ dir.

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun maksimum-minimum noktasının koordinatları $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ dır.

$a > 0$ ise minimum değer, $a < 0$ ise maksimum değer $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ ile hesaplanır.

$x = 0$ $(f(0))$ için f fonksiyonunun grafiğinin y eksenini kestiği nokta bulunur.

$f(x) = 0$ için varsa f fonksiyonunun sıfırları yani grafiğin x eksenini kestiği noktalar bulunur.

Değer kümesi gerçel sayılar olan

$f(x) = x^2 - 8x$ ve $g(x) = -x^2 + 2x - 4$

fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

- $f(x) = x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$ parabolünün kolları yukarıya doğru olduğundan fonksiyonun minimum noktası;

  $-\frac{b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$ ve $f(4) = -16$ olduğundan $T(4, -16)$ olur.

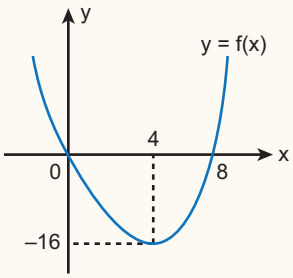
- f fonksiyonunun sıfırları

  $f(x) = 0 \Rightarrow (x - 4)^2 = 16$

  $x - 4 = 4 \quad v \quad x - 4 = -4$

  $x = 8 \quad v \quad x = 0$ dır.

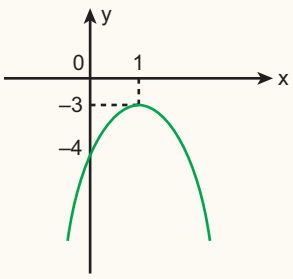
  Yani, f karesel fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği noktalar (0,0) ve (8,0) dır.

- 

  $f(0) = 0$ olduğundan grafik orijinden geçer.

- $g(x) = -x^2 + 2x - 4 = -(x - 1)^2 - 3$ parabolünün kolları aşağı doğru olduğundan fonksiyonun maksimum noktası;

  $-\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$ ve $f(1) = -3$ olduğundan $T(1, -3)$ olur.

- 

  g fonksiyonunun sıfırları $g(x) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = -3$ olduğundan g karesel fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği nokta yoktur.

- $f(0) = -4$ olduğundan grafik y eksenini $(0, -4)$ noktasında keser.

Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar		Maksimum-Minimum Noktaları		Sıfırları
	Azalan	Artan	Minimum	Maksimum	
$f(x) = x^2 - 8x$	$(-\infty, 4]$	$[4, \infty)$	$(4, -16)$	Yoktur.	$x = 0$, $x = 8$
$g(x) = -x^2 + 2x - 4$	$[1, \infty)$	$(-\infty, 1]$	Yoktur.	$(1, -3)$	Yoktur.

İKİNCİ DERECEDEN VERİLEN İFADELERİ TAMKARE İFADELERE DÖNÜŞTÜRMEK

1. Değer kümesi gerçel sayılar olan

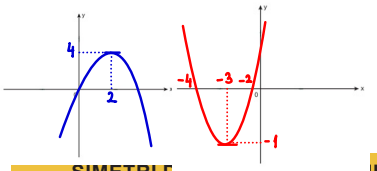
$f(x) = -x^2 + 4x$ ve $g(x) = x^2 + 6x + 8$

fonksiyonlarının grafiklerini çizip aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar		Maksimum-Minimum Noktaları		Sıfırları
	Azalan	Artan	Min.	Maks.	
$f(x) = -x^2 + 4x$	$[2, \infty)$	$(-\infty, 2]$	Yok	$(2, 4)$	
$g(x) = x^2 + 6x + 8$	$(-\infty, -3]$	$[-3, \infty)$	$(-3, -1)$	Yok	

CEVAP

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Artan-Azalan Olduğu Aralıklar		Maksimum-Minimum Noktaları		Sıfırları
	Azalan	Artan	Min.	Maks.	
$f(x) = -x^2 + 4x$	$[2, \infty)$	$(-\infty, 2]$	Yok	$(2, 4)$	$x = 0$, $x = 4$
$g(x) = x^2 + 6x + 8$	$(-\infty, -3]$	$[-3, \infty)$	$(-3, -1)$	Yok	$x = -2$, $x = -4$

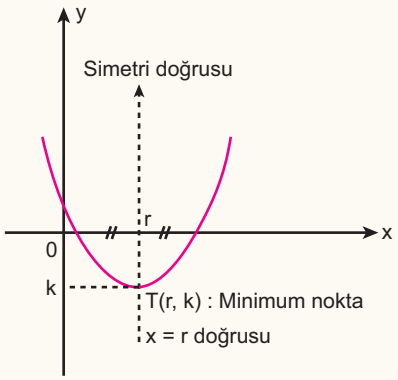


SİMETRİ DOĞRUSU - MAKSİMUM VE MİNİMUM NOKTA

Karesel bir fonksiyon grafiğinin maksimum ya da minimum noktasından geçen (Tepe noktası) ve x eksenine dik olan doğruya **simetri doğrusu** denir.

$a, r, k \in \mathbb{R}$ ve $a > 0$ olmak üzere

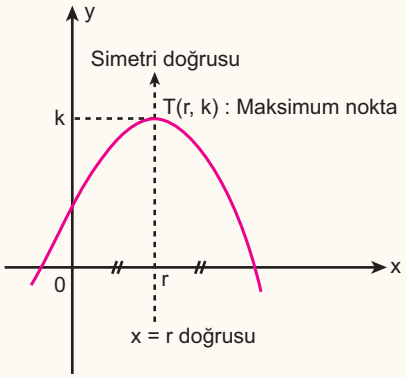
$f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olsun.



- f fonksiyonunun minimum değeri k dır.
- f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $[k, \infty)$ dur.

$a, r, k \in \mathbb{R}$ ve $a < 0$ olmak üzere

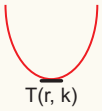
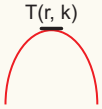
$g(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olsun.



- f fonksiyonunun maksimum değeri k dır. Minimum değeri yoktur.
- f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $(-\infty, k]$ dır.

ÖZET

★ $a \neq 0$ ve a, r ve k birer reel sayıdır.
$f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ karesel fonksiyonunda

- $a > 0$ ise  fonksiyonunun minimum noktası var.
  T(r, k)
- $a < 0$ ise T(r, k)  fonksiyonunun maksimum noktası var.

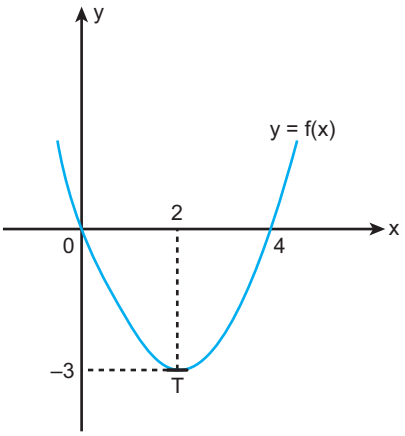
Sonuç olarak; bir karesel fonksiyon en küçük ya da en büyük değerini tepe noktasında alır ve bu değer tepe noktasının ordinatıdır.

★ $a \neq 0$ ve a, b ve c birer reel sayıdır.
$f(x) = ax^2 + bx + c$ karesel fonksiyonunda

- $a > 0$ ise fonksiyonunun minimum noktası var.
  $T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
- $a < 0$ ise $T\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ fonksiyonunun maksimum noktası var.

Örnek

Aşağıda y = f(x) ve y = g(x) karesel fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



$f(x) = \frac{3}{4}(x-2)^2 - 3$

a > 0 min. r k

T(2, –3)

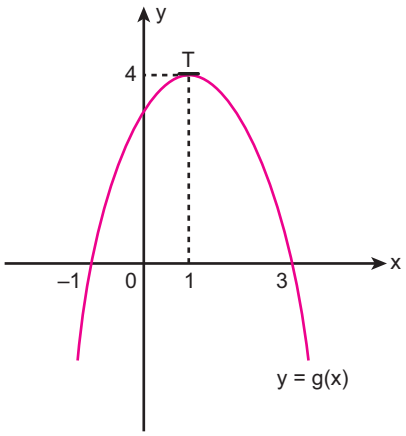
- Simetri doğrusu: x = 2
- Fonksiyonun alabileceği minimum değer: –3
- Tanım kümesi: $\mathbb{R}$
- Görüntü kümesi: [–3, ∞)
- f fonksiyonunun sıfırları

  $\frac{3}{4}(x-2)^2 = 3$

  $(x-2)^2 = 4$

  x – 2 = 2 v x – 2 = –2

  x = 4 v x = 0 dır.



$g(x) = -(x-1)^2 + 4$

a < 0 maks. r k

T(1, 4)

- Simetri doğrusu: x = 1
- Fonksiyonun alabileceği maksimum değer: 4
- Tanım kümesi: $\mathbb{R}$
- Görüntü kümesi: (–∞, 4]
- g fonksiyonunun sıfırları

  $(x-1)^2 = 4$

  x – 1 = 2 v x – 1 = –2

  x = 3 v x = –1 dir.

SİMETRİ DOĞRUSU - MAKSİMUM VE MİNİMUM NOKTA

1. $f(x) = x^2 - (k - 2)x + 4$

karesel fonksiyonun grafiğinin simetri doğrusu x = 5 doğrusu olduğuna göre, k kaçtır?

12

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(k-2)}{2} = 5$

$k - 2 = 10$

$k = 12$

2. $f(x) = x^2 - 6x + a$

karesel fonksiyonunun alabileceği en küçük değer –7 dir.

Buna göre, a kaçtır?

2

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$

$f(3) = 9 - 18 + a = -7$

$-9 + a = -7$

$a = 2$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = -2x^2 + ax + 3$

karesel fonksiyonunun grafiğinin simetri doğrusu x = 1 doğrusudur.

Buna göre, f fonksiyonunun alabileceği en büyük değer kaçtır?

5

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{a}{-4} = 1 \Rightarrow a = 4$

$f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

$f(1) = -2 + 4 + 3 = 5$

4. a bir gerçel sayı olmak üzere,

$f(x) = (x - a)^2 + 2a - 1$

karesel fonksiyonunun alabileceği en küçük değer 7 olduğuna göre, f fonksiyonunun grafiğinin simetri doğrusunu bulunuz.

x = 4

$2a - 1 = 7 \Rightarrow 2a = 8$

$a = 4$

$x = r = a \Rightarrow x = 4$

5. Reel sayılarda tanımlı

$f(x) = (x + 1)^2 + 3$

karesel fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğinin simetri doğrusunu bulunuz. $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

b) f fonksiyonunun alabileceği minimum değer kaçtır? $f(-1) = 0^2 + 3 = 3$

c) f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz. $G.K = [-1, \infty)$

d) f fonksiyonunun sıfırlarını varsa bulunuz. T.N$(-1, 3)$

a) x = –1
b) 3
c) [–1, ∞)
d) Yoktur

$(x+1)^2 + 3 = 0$

$(x+1)^2 = -3$

Sıfırı yoktur.

6. Reel sayılarda tanımlı

$f(x) = -x^2 - 4x + 5 = -(x+2)^2 + 9$

karesel fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğinin simetri doğrusunu bulunuz. $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

b) f fonksiyonunun alabileceği maksimum değer kaçtır? $f(-2) = -0^2 + 9 = 9$

c) f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz. $G.K = (-\infty, -2]$

d) f fonksiyonunun sıfırlarını varsa bulunuz.

a) x = –2
b) 9
c) (–∞, –2]
d) {–5, 1}

$-(x+2)^2 + 9 = 0$

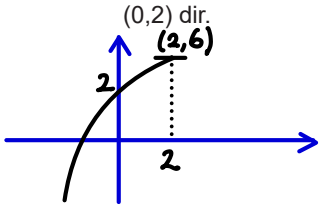
$(x+2)^2 = 9$

$x + 2 = -3 \lor x + 2 = 3$

$x = -5 \quad x = 1$

7. Aşağıda y = f(x) karesel fonksiyonunun grafiği için aşağıdakiler bilinmektedir.

- f fonksiyonunun grafiğinin simetri doğrusu x = 2 dir.
- f fonksiyonunun maksimum değeri 6 dır.
- f fonksiyonunun y eksenini kestiği noktanın ordinatı (0,2) dir.



$f(x) = a.(x-2)^2 + 6$

$f(0) = 4a + 6 = 2$

$a = -1$

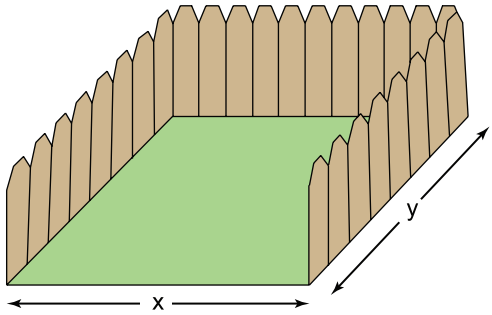
$f(x) = -(x-2)^2 + 6$

$g(x) = -x^2 + 4$

g(x) = –x² + 4

MAKSİMUM - MİNİMUM PROBLEMLERİ

1. Yapılacak bir oyun alanı için kenarları x ve y metre olan dikdörtgen şeklindeki bir yeşil alanın 3 kenarı şekildeki gibi çitle çevrilmiştir.



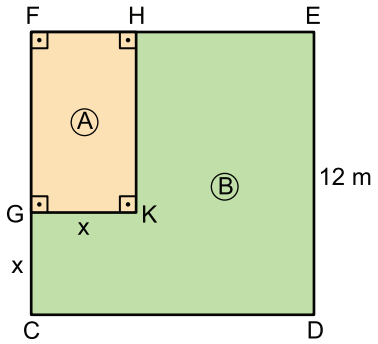
$x + 2y = 200 \Rightarrow x = 200 - 2y$

$A = x.y = (200 - 2y).y = 200y - 2y^2$

$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{200}{-4} = 50$

$A(50) = (200 - 2.50).50 = 100.50 = 5000$

2.



$A = (12-x).x.2 + [12.12 - (12-x).x].3$

$A = -x.(12-x) + 144.3 = x^2 - 12x + 432$

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2} = 6$

$A(6) = 6^2 - 12.6 + 432 = 36 - 72 + 432$

$A(6) = 396$

3. Bir sandviç büfesi tanesi 30 liradan 200 tane sandviç satmaktadır. Sandviç büfesi sandviçlerde her 1 liralık indirim için 20 sandviç fazla sattığını farketmiştir.

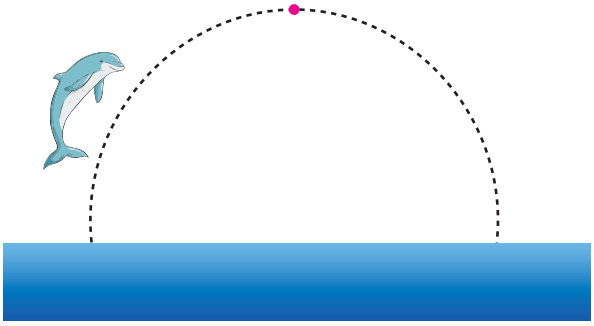
$K = (30-x).(200+20x) - 10.(200+20x)$

$K = (20-x).(200+20x) = -20x^2 + 200x + 4000$

25 $x = r = -\frac{200}{-40} = 5$

Satış $= 30 - 5 = 25$ lira

4. Yunuslar havada yükselirken kendi ekseni etrafında dönerek parabol şeklinde bir yol izler. (Yunusların boyu çözümde önemsenmeyecektir.)



Verilen bilgilere göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Görseldeki gibi modellenen, sudan atlayan yunusun sudan yüksekliğinin zamana (saniye) bağlı değişimini metre cinsinden veren yol $h(t) = -2 \cdot (t-2)^2 + 8$ ile ifade edildiğine göre, yunusun su üzerinde en fazla kaç metre yükseğe sıçrayabileceğini bulunuz.

b) Yunus'un sudan çıktığı andan itibaren havada kaç saniye kalacağını bulunuz.

a) 8 b) 4

a) $t = 2$ için $h(2) = -2.0^2 + 8 = 8$

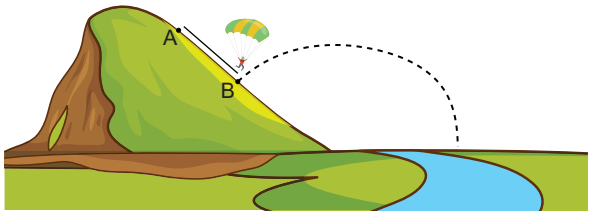
b) $-2.(t-2)^2 + 8 = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 4$

$t - 2 = -2 \vee t - 2 = 2$

$t = 0 \quad t = 4$

4 sn havada kalır.

5.



Yamaç paraşütü alan Hakan, aşağıdaki şekilde görülen yamacın A noktasından koşarak hareket etmeye başlamış, B noktasına ulaştığında havalanmıştır. Havalandıktan sonra maksimum yüksekliğe ulaşıp nehrin karşısındaki düzlük alana iniş yapmıştır.

Hakan'ın havalandığı andan itibaren yüksekliği (metre), zamana (dakika) bağlı olarak aşağıdaki fonksiyonla ifade edilmektedir.

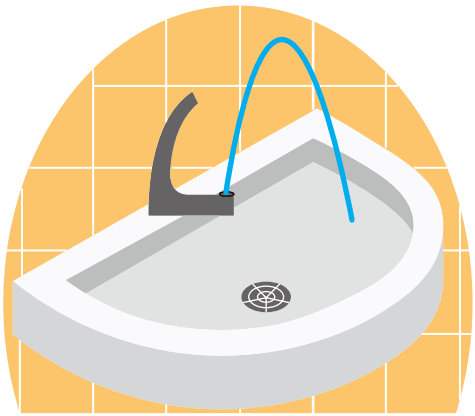
$f(t) = -4t^2 + 8t + 100$ $\quad t = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-8} = 1$

Bu bilgilere göre, Hakan'ın ulaştığı maksimum yükseklik kaç metredir?

104

$f(1) = -4 + 8 + 100 = 104$

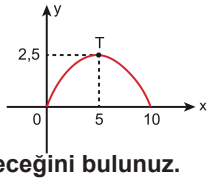
Etkinlik 3



Bir musluktan fışkıran suyun zamana (sn.) göre ulaştığı yükseklik (m) $t \geq 0$ olmak üzere, $f(t) = -0{,}1 \cdot (t-5)^2 + 2{,}5$ fonksiyonu ile modellenmiştir. Su, fışkırdığı nokta ile yatayda aynı doğrultuda farklı bir noktaya düşmektedir.

Buna göre,

a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.



b) Suyun en fazla kaç metre yükseleceğini bulunuz.

$t = 5$ için $f(5) = -0{,}1 \cdot 0^2 + 2{,}5$

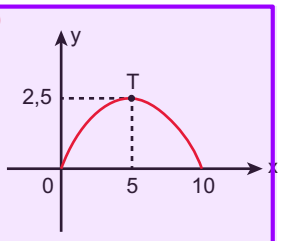
$f(5) = 2{,}5$

c) Suyun fışkırdıktan kaç saniye sonra yere düşeceğini bulunuz.

$t =$ dan $t = 10$'a kadar havada kalmış

$t = 10$

a)



b) 2,5
c) 10

Etkinlik 4

Bir fabrikada üretilen makinelerin çalışma verimi (V), bakım süresine (x) bağlı olarak değişmektedir. Düzenli bakım yapıldığında verim düşerken, fazla bakım yapıldığında da gereksiz duruş süreleri nedeniyle verim azalmaktadır.

Bu ilişki,

- x : Yapılan bakım süresi (saat)
- V(x) : Verimlilik (üretim miktarı/saat)

olmak üzere, aşağıdaki fonksiyonla ifade edilir.

$$V(x) = -0{,}1x^2 + 4x + 20$$

Buna göre,

a) Bakım süresinin hangi değerde maksimum verim sağladığını bulunuz.

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-0{,}2} = \frac{40}{2} = 20$

b) Maksimum verimlilik değerini hesaplayınız.

$V(20) = -0{,}1 \cdot 400 + 80 + 20$

$= -40 + 100$

$= 60$

c) Bakım süresinin sıfır olduğu durumda verimliliği bulunuz.

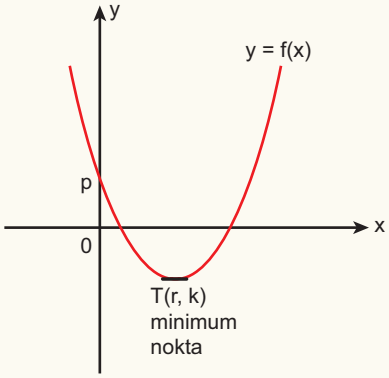
a) 20
b) 60
c) 20

$V(0) = -0{,}1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 20$

$= 20$

MAKSİMUM YA DA MİNİMUM NOKTASI VE HERHANGİ BİR NOKTASI VERİLEN KARESEL FONKSİYONUN KURALININ BULUNMASI

Aşağıda y = f(x) karesel fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



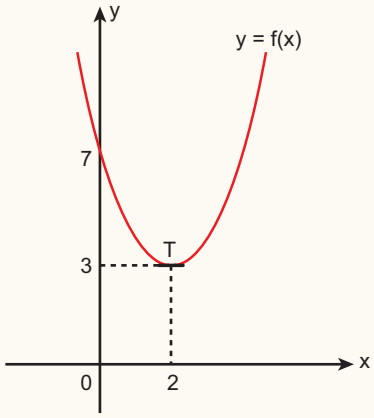
$f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$

şeklinde yazılır.

Ayrıca, f(0) = p olduğundan buradan da a değeri bulunur.

Örneğin;

Aşağıda verilen y = f(x) karesel fonksiyonunun minimum noktası T(2, 3) tür.



$f(x) = a \cdot (x - 2)^2 + 3$

Ayrıca, f(0) = 7 olduğundan;

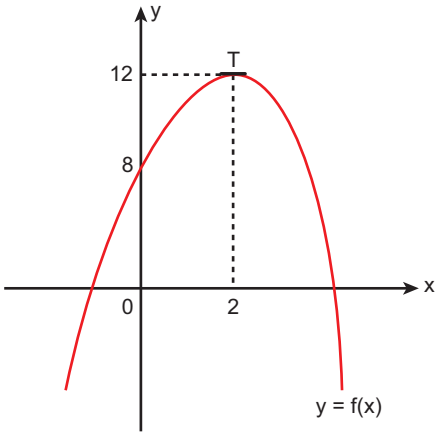
$f(0) = 4a + 3 = 7$

$4a = 4$

$a = 1$ olur.

Buradan; $f(x) = (x - 2)^2 + 3$ cebirsel temsili elde edilir.

1. Aşağıda verilen y = f(x) karesel fonksiyonun maksimum noktası T(2, 12) dir.



Buna göre, f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

$y = -(x - 2)^2 + 12$

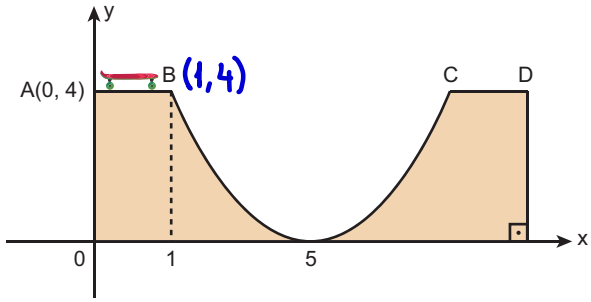
$f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 12$

$f(0) = a \cdot 4 + 12 = 8$

$4a = -4 \Rightarrow a = -1$

$f(x) = -(x-2)^2 + 12$

2. Aşağıda bir kısmı doğrusal, bir kısmı parabol şeklinde olan bir kaykay pistinin önden görünümü verilmiştir.



Buna göre, kaykay pistinin karesel fonksiyon olan kısmının cebirsel temsilini bulunuz.

$y = \frac{1}{4} \cdot (x - 5)^2$

$f(x) = a \cdot (x-5)^2$

$f(1) = a \cdot 4^2 = 4$

$16a = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-5)^2$

1. f : [0, 4] → ℝ aralığında tanımlı

$f(x) = x^2$

karesel referans fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. f fonksiyonu bire birdir.

II. f fonksiyonunun alabileceği en büyük değer 16'dır.

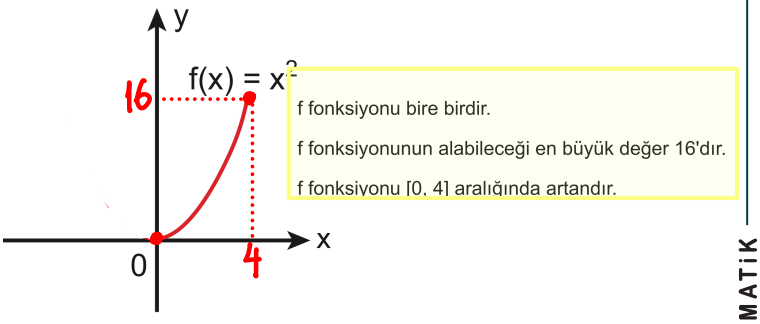
III. f fonksiyonu [0, 4] aralığında artandır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

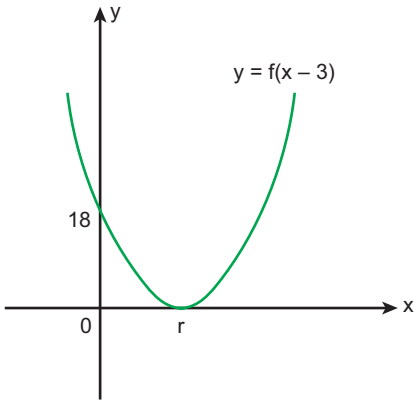
E

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II

D) I ve III E) I, II ve III



2. Aşağıda verilen y = f(x – 3) fonksiyonunun grafiği $f(x) = ax^2$ fonksiyonunun x ekseninde pozitif yönde 3 birim ötelenmesiyle elde edilmiştir.



Buna göre, a + r toplamı kaçtır?

D

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

$f(x-3) = a.(x-3)^2$

$x=0$ için $a.3^2 = 18 \Rightarrow a = 2$

$f(x-3) = 2.(x-3)^2$ $r = x = 3$

$a + r = 2 + 3 = 5$

3. a, r ve k birer reel sayı ve a > 0 olmak üzere,

$f(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$

karesel fonksiyonunun grafiğinin simetri doğrusu x = 3 ve fonksiyonun alabileceği en küçük değer –2 olduğuna göre, r + k toplamı kaçtır?

B

A) –4 B) –5 C) –6 D) –7 E) –8

$x + r = 0 \Rightarrow x = -r = 3$ $k = -2$

$r = -3$

$r + k = -3 - 2 = -5$

4. I. $y = x^2 + 2x - 8$

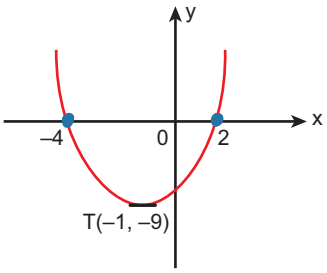
$y = (x+1)^2 - 9$

T.N $(-1, -9)$

$(x+1)^2 = 9$

$x + 1 = 3 \vee x + 1 = -3$

$x = 2 \vee x = -4$



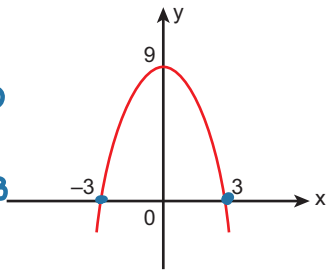
II. $y = -x^2 + 9$

T.N $(0, 9)$

$y = 0$ için $-x^2 + 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x = -3 \vee x = 3$

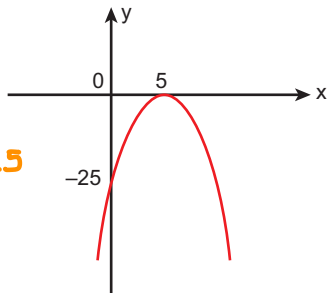


III. $y = -(x - 5)^2$

T.N $(5, 0)$

$y = 0$ için $x = 5$

$x = 0$ için $y = -25$



Yukarıda kuralı verilen fonksiyonlardan hangilerinin grafiği doğru çizilmiştir?

E

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) II ve III E) I, II ve III

AÇIL MATEMATİK

5. $f(x) = -x^2 + 6x - 3$

fonksiyonunun alabileceği en büyük değer kaçtır?

B

A) 3 B) 6 C) 9 D) 12 E) 24

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2}$

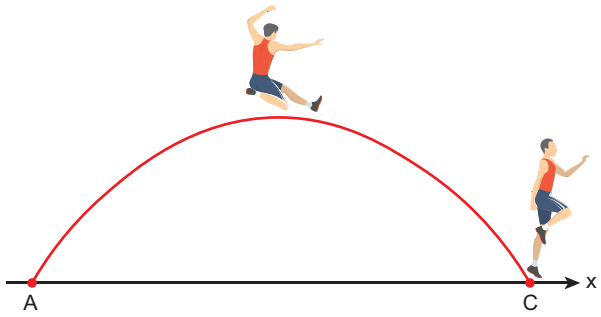
$x = r = 3$

$f(3) = -3^2 + 6.3 - 3$

$= -9 + 18 - 3$

$= 6$

6. Bir uzun atlama yarışmacısı A noktasından harekete başlayıp parabolik yörünge çizerek atlayışını C noktasında tamamlamıştır.



Uzun atlama yarışmacısının bu hareketi boyunca yerden yüksekliği (m), zamana bağlı (sn) olarak ifade eden fonksiyon $f(t) = -(t - 5)^2 + 25$ şeklinde karesel fonksiyon ile modellenmiştir.

Buna göre,

I. Yarışmacı atlayışa başladığı andan itibaren havada 10 saniye kalmıştır.

II. Yarışmacının maksimum yüksekliği 25 metredir.

III. Yarışmacı maksimum yüksekliğe 5. saniyede ulaşmıştır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

E

$t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5$

$f(5) = -0^2 + 25 = 25$

T.N(5,25)

maksimum yükseklik

sıfırlarını bulalım.

$(t-5)^2 = 25 \Rightarrow t - 5 = 5 \vee t - 5 = -5$

$t = 10 \quad t = 0$

t=0 dan t=10'a 10 sn havada kalmış

7. $f : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = -x^2 - 4x + 6$

fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A

A) [–15, 9] B) [–15, 10] C) [–15, ∞) D) [9, ∞) E) (–∞, 10]

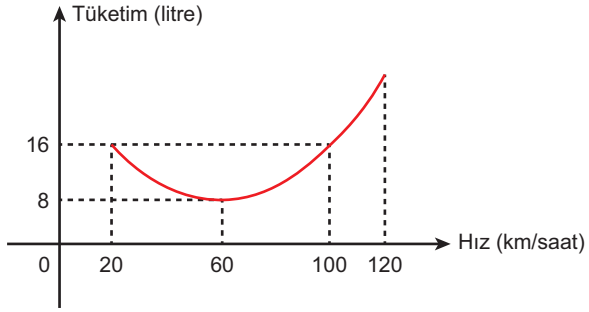
$x = r = -\frac{-4}{-2} = -2 \notin [-1, 3]$

$f(-1) = -1 + 4 + 6 = 9$

$f(3) = -9 - 12 + 6 = -15$

$G.K = [-15, 9]$

8. Aşağıda bir karesel fonksiyonun grafiği verilmiştir. Bu grafik, belirli bir otomobil modelinin yakıt tüketiminin hızıyla ilişkisini göstermektedir.



Bu otomobil en düşük yakıt tüketimine 60 km/saat hızda ulaştığına göre, otomobil 120 km/saat hızda kaç litre benzin tüketir?

D

$y = a.(x-60)^2 + 8$

(20,16) için $a.40^2 + 8 = 16$

$a.40^2 = 8$

$a = \frac{1}{200}$

$f(x) = \frac{1}{200}(x-60)^2 + 8$

$f(120) = \frac{1}{200}.60^2 + 8 = 18 + 8 = 26$

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = -x^2 + 20x + 20$

fonksiyonunun görüntü kümesindeki elemanlardan biri aşağıdakilerden hangisi olamaz?

E

A) –100 B) 0 C) 115 D) 120 E) 125

$x = r = -\frac{20}{-2} = 10$

$k = f(10) = -100 + 200 + 20$

$= 120$

$G.K = (-\infty, 120]$

ACİL MATEMATİK

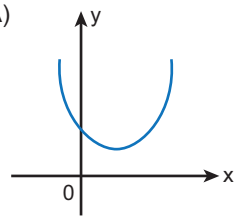
1. $a > 0$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2 - 2ax + a^2$$

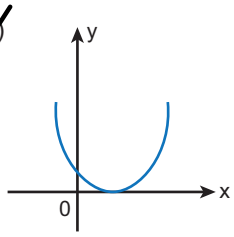
fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

B

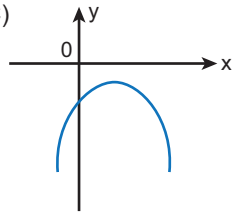
A)



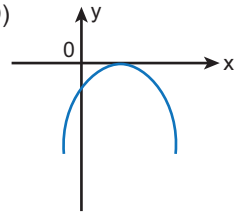
B)



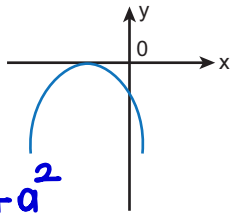
C)



D)



E)



+ V

$f(x) = x^2 - 2ax + a^2$

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2a}{2} = a$

$k = a^2 - 2a^2 + a^2 = 0$

T.N $(a, 0)$

$x = 0$ için $y = a^2$

$y = 0$ için $(x-a)^2 = 0 \Rightarrow x = a$

2. k bir reel sayı olmak üzere,

$$f(x) = -(x-1)^2 + k$$

karesel fonksiyonunun alabileceği en büyük değer 9'dur.

Buna göre, f fonksiyonunun sıfırlarının çarpımı kaçtır?

D

A) –12 B) –10 C) –9 D) –8 E) –6

$x = r = 1$

$f(1) = -0^2 + k = 9 \Rightarrow k = 9$

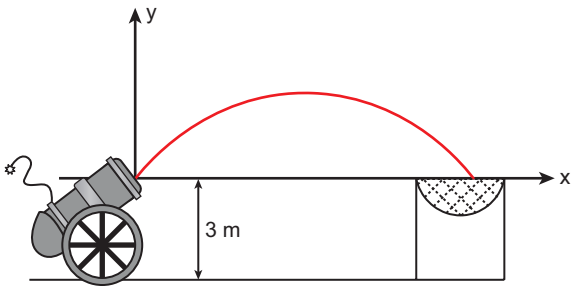
$-(x-1)^2 + 9 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 9$

$x - 1 = 3$ V $x - 1 = -3$

$x = 4$ $x = -2$

$4 \cdot -2 = -8$

3.



Bir top tarafından fırlatılan bir sirk cambazı

$$f(x) = -\frac{1}{20}\left(x^2 - 20x\right)$$

karesel fonksiyonunun grafiğinin belirttiği yörüngede ilerleyerek görseldeki ağa düşmüştür.

Top ve ağın her ikisi de yerden 3 metre yükseklikte olduğuna göre, cambaz izlediği yörüngede yerden en fazla kaç metre yükseğe çıkmıştır?

D

A) 28 B) 18 C) 15 D) 8 E) 5

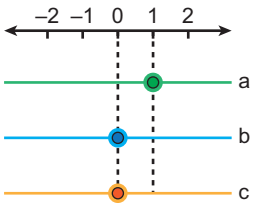
$x = r = -\frac{1}{2 \cdot -\frac{1}{20}} = 10$

$k = 10 - \frac{1}{20} \cdot 10^2 = 10 - 5 = 5$

$5 + 3 = 8$

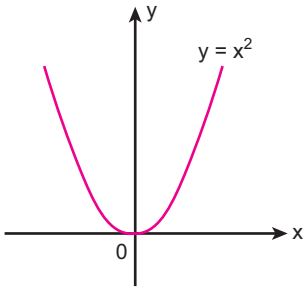
4. Murat bir grafik çizim programında aşağıdaki grafiği çizdirmiştir.

Katsayı değer tablosu



Şekil 1

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$'nin grafiği



Şekil 2

Murat, Şekil 1'deki katsayı değer tablosunda a, b, c için tablodaki değerleri belirlemiş ve çizim programı bu değerlerle oluşan $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğini Şekil 2'deki gibi çizmiştir.

Murat daha sonra Şekil 1'deki katsayı değer tablosunda a'nın butonunu olduğu gibi bırakıp b ve c'nin butonlarını k birim sağa taşıyarak $y = g(x)$ fonksiyonunu elde etmiş ve grafiğini çizdirmiştir.

$g(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$

$a = 1$ $b = 4$ $c = 4$

$b = c = 0$ iken $b = c = 4$ olmuş

4 br sağa kaymış $k = 4$

ACİL MATEMATİK

Performans Değerlendirme

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x^2$

karesel referans fonksiyonundan türetilen

$g(x) = x^2 - 9$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. g fonksiyonunun minimum değeri –9'dur.

II. g fonksiyonu ne bire bir ne de örtendir.

III. g fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık $[0, \infty)$ dur.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

E

$x=0$ için $y=-9$

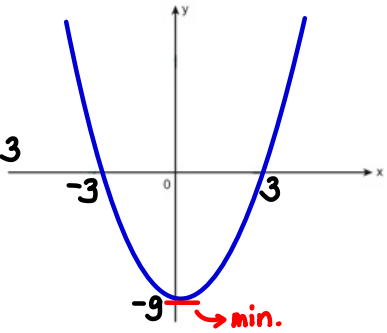
$y=0$ için $x^2-9=0$

$x^2=9$

$x=-3 \vee x=3$

$(-\infty,0]$ azalan

$[0,\infty)$ artan



2. Reel sayılarda tanımlı olan

$f(x) = -3x^2 + 6x + 2$

karesel fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. f fonksiyonunun grafiğinin simetri doğrusu x = 1'dir.

II. f fonksiyonunun maksimum değeri 5'tir.

III. f fonksiyonu $[1, \infty)$ aralığında azalandır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

E

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II

D) II ve III E) I, II ve III

$f(x)=-3.(x-1)^2+5$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ (simetri doğrusu)

T.N(1,5)

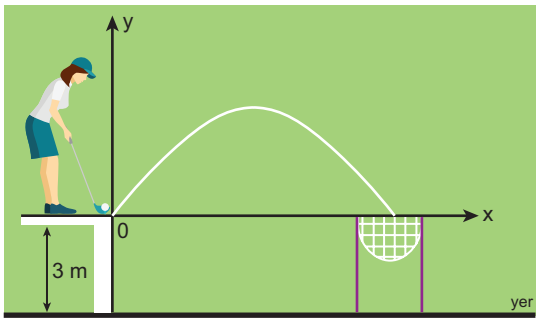
maksimum değer

T.N(1,5)

$(-\infty,1]$ artan

$[1,\infty)$ azalan

3. Aşağıdaki görselde verilen bir golf oyuncusu bir rampanın üzerinde golf topunu yerden 3 metre yükseklikteki potaya doğru atıyor.



Topun havada çizdiği yörünge $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 10x$ karesel fonksiyonu ile modellenmiştir.

Buna göre, top yerden en çok kaç metre yükseğe çıkmıştır?

D

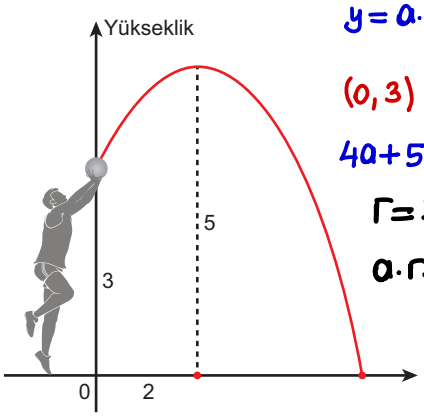
A) 125 B) 126 C) 127 D) 128 E) 129

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2.\frac{-1}{5}} = 25$

$k = f(25) = -\frac{1}{5}.25^2 + 10.25 = 125$

$125 + 3 = 128$

4. Aşağıda bir gülle atışı modellenmiştir.



$y = a.(x-2)^2+5$

$(0,3)$ için

$4a+5=3 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

$r=2 \quad k=5$

$a.r.k = -\frac{1}{2}.2.5$

$= -5$

Sporcu, gülle 3 birim yüksekliğe ulaşınca gülleyi elinden fırlatmıştır. Gülle parabolik bir menzilde yol alarak yere düşmüştür. Gülle yerden en fazla 5 birim yüksekliğe ulaşmış ve tam bu esnada gülleden kopan bir parça orijinin 2 birim uzağına düşmüştür.

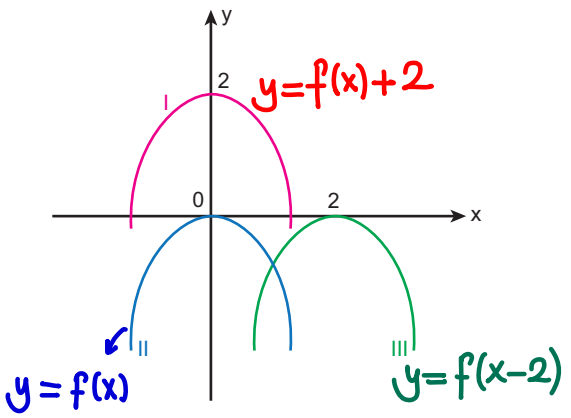
Güllenin yerden yüksekliğinin zamana bağlı ifadesi $f(x) = a \cdot (x - r)^2 + k$ şeklinde tanımlı karesel fonksiyon ile modellendiğine göre, $a \cdot r \cdot k$ çarpımı kaçtır?
(a, r ve k birer reel sayıdır.)

E

A) –20 B) –18 C) –15 D) –10 E) –5

ACİL MATEMATİK

5.



Yukarıda verilen dik koordinat sisteminde,

II. a: y = f(x)

III. b: y = f(x – 2)

I. c: y = f(x) + 2

fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki seçeneklerden hangisinde karesel fonksiyon-grafik eşleştirmesi doğru verilmiştir?

D

A) I-a, II-b, III-c B) I-a, II-c, III-b C) I-b, II-a, III-c

D) I-c, II-a, III-b E) I-b, II-c, III-a

6. f : [–4, 1] → ℝ,

$f(x) = -x^2 + 4x - 6$

fonksiyonunun alabileceği en büyük değer aşağıdakilerden hangisidir?

A) –1 B) –2 C) –3 D) –4 E) –5

$x = r = -\frac{4}{-2} = 2 \notin [-4, 1]$

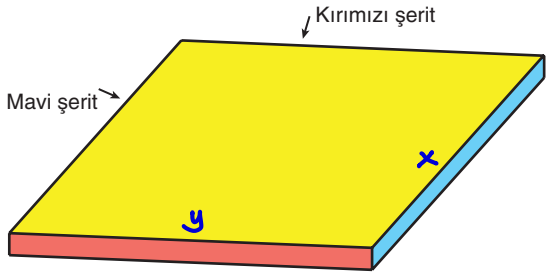
$f(-4) = -16 - 16 - 6 = -38$

$f(1) = -1 + 4 - 6 = -3$

G.K = [-38, -3]

-3

7. Aşağıdaki dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun alt ve üst yüzü sarı jelatin, yan yüzleri karşılıklı kırmızı ve mavi şeritlerle kaplanacaktır.



Kutunun üst yüzeyinin çevresi 4 birim olup, sarı jelatinin birimkaresi 5 kuruştur. Şeritlerin fiyatları uzun kenarlarıyla birim fiyatın çarpılmasıyla bulunacaktır.

Kırmızı şeritin birim fiyatı 30 kuruş ve mavi şeritin birim fiyatı 25 kuruştur.

Buna göre, kaplama işleminin maliyetinin maksimum olması için kutunun üst yüzeyinin kısa kenarı kaç birim olmalıdır?

C

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

$2.(x+y) = 4 \Rightarrow x + y = 2$

$x = 2 - y$

$M = 2xy.5 + 30.y.2 + 25.x.2$

$M = 10y.(2-y) + 60y + 50(2-y)$

$M = -10y^2 + 30y + 100$

$y = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{-20} = \frac{3}{2}$

$x = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

8. y = f(x) karesel fonksiyonunun minimum noktası

A(2, 1)

olduğuna göre, y = –f(x – 1) karesel fonksiyonunun maksimum noktası aşağıdakilerden hangisidir?

D

A) (3, 0) B) (0, –3) C) (–3, 1)

D) (3, –1) E) (–3, –1)

f(x−1) için minimum nokta A'(3,1)

−f(x−1) için maksimum nokta A''(3,−1) olur.

ACİL MATEMATİK

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x^2$

karesel referans fonksiyonundan türetilen

$g(x) = 2 \cdot (x + 3)^2$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

I. g fonksiyonunun minimum değeri –3'tür.

II. g fonksiyonu örten değildir.

III. g fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık $(-\infty, -3]$ tür.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

C

A) Yalnız I B) I ve II C) II ve III

D) Yalnız III E) I, II ve III

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$ $x=r=-3$

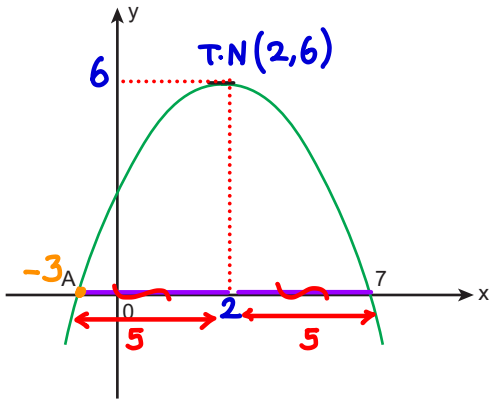
$k=g(-3)=2.0^2=0$

minimum değeri 0 dır.

T.N(-3,0) $(-\infty,-3]$ azalan

$[-3,\infty)$ artan

2. Aşağıda, y = f(x) karesel fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



- y = f(x) fonksiyonunun simetri doğrusu x = 2 dir.
- y = f(x) fonksiyonunun maksimum değeri 6'dır.

Buna göre,

I. f fonksiyonunun sıfırlarının çarpımı –21'dir. $-3.7=-21$

II. f fonksiyonunun görüntü kümesi $(-\infty, 6]$ dır.

III. f fonksiyonu bire birdir. bire bir değildir.

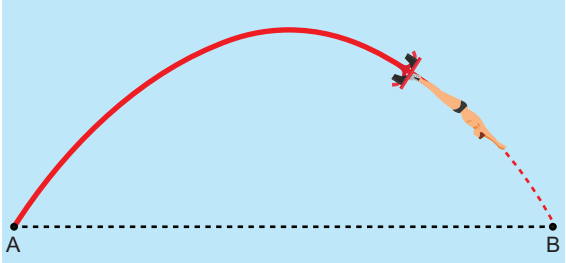
ifadelerinden hangileri doğrudur?

B

A) Yalnız I B) I ve II C) II ve III

D) Yalnız III E) I, II ve III

3. Flyboard ile deniz seviyesindeki A noktasından havalanan Alper, parabol şeklinde bir yol izleyerek deniz seviyesindeki B noktasına dalmıştır.



Alper'in bu hareketi boyunca yerden yüksekliğini (m) zamana bağlı (sn) olarak ifade eden fonksiyon

$$f(t) = -\frac{1}{2} \cdot \left(t^2 - 12t + 27\right)$$

şeklinde karesel fonksiyon ile modellenmiştir.

Alper'in çıkabildiği maksimum yükseklik k metre ve bu yükseklige ulaşma süresi t sn olmak üzere, k • t çarpımı kaçtır?

D

A) 54 B) 48 C) 36 D) 27 E) 24

$f(t)=-\frac{1}{2}.(t-6)^2+\frac{9}{2}$

$t-6=0 \Rightarrow t=6$ $k=\frac{9}{2}$

$k.t=\frac{9}{2}.6=27$

4. Bir fabrikanın günlük ürettiği x tane ürüne karşılık, elde ettiği günlük kâr,

$K(x) = -3x^2 + 150x - 150$ (TL)

karesel fonksiyonu ile modellenmektedir.

Buna göre, bu fabrikanın günlük kârı en fazla kaç TL'dir?

D

A) 1975 B) 1950 C) 1775

D) 1725 E) 1700

$x=r=-\frac{b}{2a}=-\frac{150}{-6}=25$

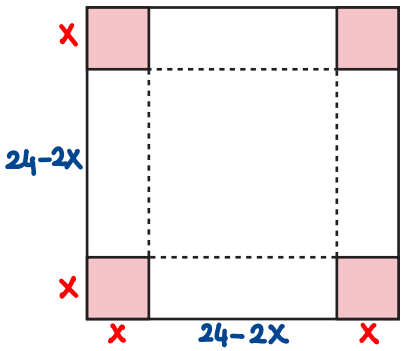
$K(25)=-3.25^2+150.25-150$

$=-1875+3750-150$

$=1725$

ACİL MATEMATİK

5.



Şekilde bir kenarı 24 cm olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden eş kare parçaları çıkarılarak en büyük hacimli üstü açık olan bir kutu yapılıyor.

Buna göre, yapılan kutunun yanal yüzünün alanının maksimum olması için başlangıçta kesilen karelerin bir kenarının uzunluğu kaç cm olmalıdır?

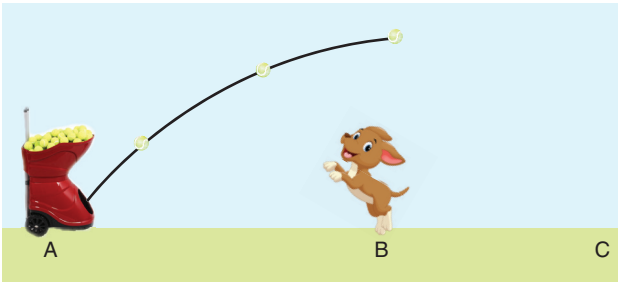
E

A) 8 B) $\frac{15}{2}$ C) 7 D) $\frac{13}{2}$ E) 6

$f(x) = (24-2x).x.4 = -8x^2 + 96x$

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{96}{2.-8} = 6$

6.



Bir tenis topu atma makinesinde A noktasından atılan topun hareketi boyunca yerden yüksekliğini (cm) zamana bağlı (sn) olarak ifade eden fonksiyon $f(x) = -\frac{1}{40}t^2 + 4t$ şeklinde modellenmektedir. Topun düşeceği C noktası ile topun atıldığı A noktasının tam ortasındaki bir B noktasında bulunan 60 cm boyundaki bir köpek, ulaşabileceği maksimum yükseklikte topu yakalamak istiyor.

Buna göre, köpeğin topu maksimum yükseklikte yakalaması için boyunun kaç katı kadar zıplaması gerekir?

C

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2.-\frac{1}{40}} = 80$

$k = f(80) = -\frac{1}{40}.80^2 + 4.80$

$= -160 + 320$

$= 160$

$160 - 60 = 100$

$\frac{100}{60} = \frac{5}{3}$

7. Bir fabrika, belirli bir modelde mont üretmektedir. Bir montun satış fiyatı 200 TL'dir ve bu fiyattan 200 adet mont satılmaktadır.

Fabrika yöneticisi, yaptığı araştırmalar sonucunda şu bulguyu elde etmiştir:

"Her bir mont için 2 TL indirim yapıldığında, satılan mont sayısı 5 adet artmaktadır."

Buna göre, bu montun kaç TL'ye satılması durumunda en yüksek gelir elde edilir?

D

A) 125 B) 130 C) 135 D) 140 E) 145

$G = (200-2x).(200+5x)$

$G = 40000 + 1000x - 400x - 10x^2$

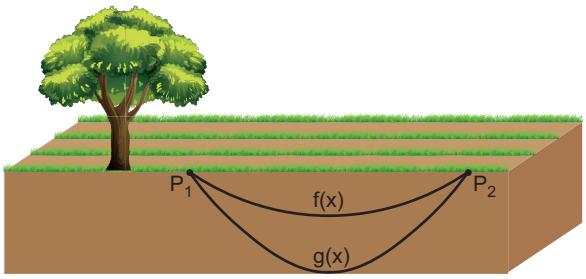
$G = -10x^2 + 600x + 40000$

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{600}{-20} = 30$

$200 - 2.30 = 200 - 60$

$= 140$ TL ye satılmalıdır.

8. Bir çiftçi, arazisinin kenarına yağmur sularını biriktirmek amacıyla bir su kanalı yaptırmak istemektedir. Aşağıdaki şekil, arazinin yatay kesitinde bu kanalın derinliğini gösteren projeyi betimlemektedir.



Başlangıçta kanalın derinliği, $g(x) = x^2 - 8x$ parabolü ile modellenmiştir. Ancak maliyeti azaltmak amacıyla bu proje revize edilmiş ve yeni model $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x$ olarak belirlenmiştir.

Her iki durumda da kanalın uç noktaları olan P_1 ve P_2 arasındaki mesafe 8 metredir.

$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4$

$g(4) = 16 - 32 = -16 \rightarrow 16$ m derinlik

$f(4) = \frac{16}{4} - 8 = -4 \rightarrow 4$ m derinlik

$16 - 4 = 12$ m

ACİL MATEMATİK