12. Sınıf

TEMELİNİ SAĞLAM AT...

İLKBAHAR KİTABI

ACİL MATEMATİK

Mahsum Öztürk
İbrahim Turan Başay
Hamza Sincar
Kadir Yiğit

- Konu Özetleri
- Çözümlü Sorular
- Testler

ACİL YAYINLARI

Copyright ©
Bu kitabın her hakkı yayınevine aittir.

Hangi amaçla olursa olsun, bu kitabın tamamının ya da bir kısmının, kitabı yayınlayan ve yayınevinin önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemi ile çoğaltılması, yayınlanması ve depolanması yasaktır.

ISBN:

Editörler
Şükrü BAYRAM
Barış İŞCAN
Ömer DOĞAN
İbrahim SARIER
Ayhan KARADAĞLI

İÇİNDEKİLER

ÜNİTE 8

Türev Kavramı 3

ÜNİTE 9

Türevin Geometrik Yorumu.....25

ÜNİTE 10

Artan ve Azalan Fonksiyonlar.....32

Ekstremum Noktalar 38

ÜNİTE 11

Minimum-Maksimum Problemleri.....49

ÜNİTE 12

Polinom Fonksiyonların
Grafiklerinin Çizimi.....55

ÜNİTE 13

İntegral 60

Belirli İntegral.....74

Belirli İntegral ile Alan Hesabı 89

Riemann Toplamı ve
İntegralin Fiziksel Yorumu.....112

ÜNİTE 14

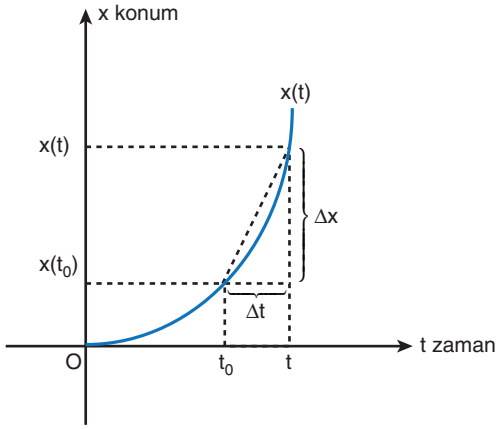
Çember Analitiği.....122

ACİL YAYINLARI
Ostim Mahallesi 1207. Sokak 3 / C-D Ostim / Yenimahalle /ANKARA
Tel: (0312) 386 00 26 Fax: (0850) 302 20 90

YANINDA BULUNSUN

Aşağıda doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin konum-zaman grafiği gösterilmiştir. Bu hareketlinin t_0. ve t. saniyeleri arasındaki ortalama hızı,

$$V_{ort} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \text{ dır.}$$



Hareketlinin t_0 anındaki anlık hızını hesaplamak istersek t'nin t_0 a yaklaşırken ($t \to t_0$) fonksiyonun değişim oranını hesaplamalıyız.

Bu oranı,

$$\lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

limiti ile hesaplayacağız.

Hesaplayacağımız bu limit değeri hareketlinin t_0 anındaki anlık hızı olacaktır. t_0 anındaki anlık hız aynı zamanda fonksiyonun t_0 anındaki değişim oranıdır. Bir fonksiyonun t_0 anındaki anlık değişim oranına **"Fonksiyonun t_0 Noktasındaki Türevi"** denir ve $x'(t_0)$ ile gösterilir.

O halde,

$$x'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \text{ olur.}$$

ÖRNEK 1.

Doğrusal olarak hareket eden bir hareketlinin zamana (saniye) bağlı konumu (metre),

$$x(t) = t^2 + 3t + 1$$

fonksiyonu ile veriliyor.

Buna göre, hareketlinin 3. saniyedeki anlık hızının (anlık değişim oranı) kaç m/sn olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

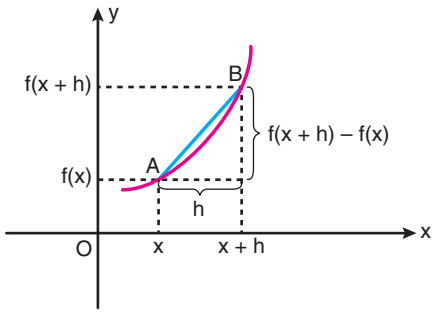
$$\lim_{x \to 3} \frac{x(t) - x(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{t^2 + 3t + 1 - 19}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{t^2 + 3t - 18}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+6).(x-3)}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} (x+6) = 9$$

YANINDA BULUNSUN

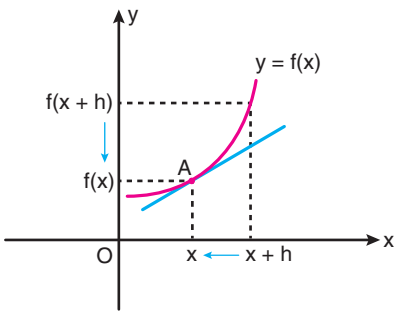
y = f(x) fonksiyonunun A ve B noktaları arasındaki değişim oranını inceleyelim.



f(x) fonksiyonunun A ve B noktalarındaki değişim hızı [AB] kirişinin eğimini verir.

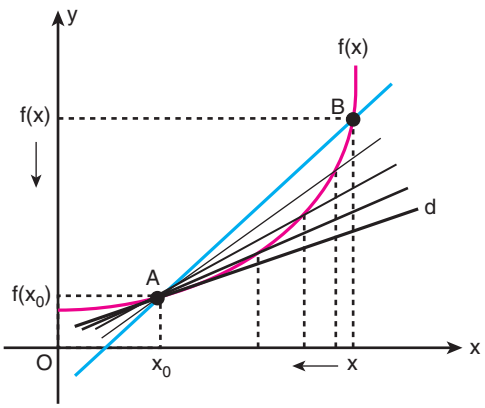
$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

h sıfıra yaklaşırken B noktası A noktasına doğru yaklaştığında [AB] kirişinin eğimi, fonksiyonun A noktasındaki teğetinin eğimi olacaktır.



Fonksiyonun A noktasındaki teğetinin eğimi, fonksiyonun A noktasındaki türevi demektir.

Aşağıdaki grafikte $x \to x_0$ doğru yanaşırken A ve B noktalarından geçen doğruların (A noktası sabit kalmak koşuluyla) A noktasından çizilen teğet doğruya dönüşmesinin görseli verilmiştir.



1. 9

YANINDA BULUNSUN

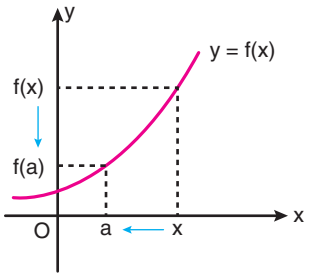
Yukarıdaki örneklerden de anlaşılacağı gibi anlık değişim oranı $h \to 0$'a yaklaşırken

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

limiti f(x) fonksiyonunun türevini verecektir.

Bir Noktada Türev

$f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli bir fonksiyon olsun.



$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti gerçek bir sayı ise bu limit değerine f(x) fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi denir.

$$f'(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a}$$

şeklinde gösterilir.

YANINDA BULUNSUN

$h > 0$ olmak üzere $x - a = h$ için $x \to a$, $h \to 0$ olur.

f(x) fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

olarak gösterilir.

$y = f(x)$ fonksiyonunun birinci türevi $\frac{dy}{dx}$, y' ve $f'(x)$ ile ikinci türevi de $\frac{d^2y}{dx^2}$, y'' veya $f''(x)$ ile gösterilir.

ÖRNEK 2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = 4$

fonksiyonunun türevini, türev tanımını kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{4 - 4}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a}$$

$$= 0$$

ÖRNEK 3.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = 3x + 1$

fonksiyonunun türevini, türev tanımını kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(3x+1) - (3a+1)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{3.(x - a)}{x - a}$$

$$= 3$$

ÖRNEK 4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = x^2$

fonksiyonunun x = 2 apsisli noktasındaki türevini türev tanımını kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2).(x+2)}{x - 2}$$

$$= 4$$

2. 0	3. 3	4. 4

ÖRNEK 5.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2h}$$

limitini türevle ifade ediniz.

ÇÖZÜM

$\frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$\frac{1}{2}\cdot f'(2)=\frac{f'(2)}{2}$

YANINDA BULUNSUN

n ve a birer reel sayı olmak üzere,

$f(x)=x^n$ ise $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$

$f(x)=a\cdot x^n$ ise $f'(x)=a\cdot n\cdot x^{n-1}$ dir.

ÖRNEK 6.

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini alınız.

a) $f(x)=x^3$ b) $f(x)=x^{-5}$

c) $f(x)=4x^2$ d) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$

e) $f(x)=5x$ f) $f(x)=\frac{2}{x^4}$

ÇÖZÜM

a) $f'(x)=3.x^2$

b) $f'(x)=-5.x^{-6}=\frac{-5}{x^6}$

c) $f'(x)=8x$

d) $f'(x)=\frac{3}{2}.x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}.\sqrt{x}$

e) $f'(x)=5$

f) $f'(x)=-8x^{-5}=\frac{-8}{x^5}$

ÖRNEK 7.

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$f(x)=\sqrt{x^3}$

olduğuna göre, $f'(x)$ i bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{1/2}$

$f'(x)=\frac{3}{2}.\sqrt{x}$

ÖRNEK 8.

$f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$

$f(x)=\sqrt{x\sqrt{x}}$

olduğuna göre, $f'(1)$ i bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x)=\sqrt[4]{x^3}\Rightarrow f(x)=x^{3/4}$

$f'(x)=\frac{3}{4}.x^{-1/4}=\frac{3}{4}.\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

$f'(1)=\frac{3}{4}$

YANINDA BULUNSUN

İki Fonksiyonun Toplam ve Farkının Türevi

f ve g: R → R türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere,

$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$

$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$

İki fonksiyonun toplam ve farkının türevleri fonksiyonların türevleri toplamı ve farkına eşittir.

5. $\frac{f'(2)}{2}$	6. a) $3x^2$ b) $\frac{-5}{x^6}$ c) $8x$ d) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ e) 5 f) $\frac{-8}{x^5}$
7. $\frac{3}{2}\sqrt{x}$	8. $\frac{3}{4}$

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 9.

Aşağıda verilen fonksiyonların türevini bulunuz.

a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 2x + 1$

b) $g(x) = 2x^2 - \sqrt{x} + 3$

c) $h(x) = \frac{3}{x^2} - x^3 + 4x - 5$

ÇÖZÜM

a) $f'(x) = 12x^2 - 2x + 2$

b) $g'(x) = 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $h'(x) = \frac{-6}{x^3} - 3x^2 + 4$

ÖRNEK 10.

$f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 9x^2 - 4x + 4$

$f'(1) = 9 - 4 + 4$

$f'(1) = 9$

ÖRNEK 11.

$f(x) = 2x^2 - x + 1$

$g(x) = x^3 - 4x - 3$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(f - g)'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$(f-g)'(-1) = f'(-1) - g'(-1)$

$f'(x) = 4x - 1$, $g'(x) = 3x^2 - 4$

$f'(-1) = -5$ $\quad g'(-1) = -1$

$(f-g)'(-1) = -5 - (-1) = -4$

ÖRNEK 12.

$f(x) = ax^3 - 2x^2 + ax + 3$

fonksiyonu veriliyor.

$f'(-2) = -5$ olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3ax^2 - 4x + a$

$f'(-2) = 12a + 8 + a = -5$

$13a = -13$

$a = -1$

ÖRNEK 13.

$f(x) = 4x + 1$ olmak üzere,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 4x + 1$

$f'(x) = 4$

ÖRNEK 14.

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$f'(2) = 12 - 8 + 5$

$= 9$

9. a) $12x^2 - 2x + 2$ b) $4x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$ c) $\frac{-6}{x^3} - 3x^2 + 4$				
10. 9	11. –4	12. –1	13. 4	14. 9

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 15.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - x - 5$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

$f(x) = f'(x)$

denklemini sağlayan pozitif x değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$x^2 - x - 5 = 2x - 1$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$-4 \quad +1$

$x = 4, \quad x = -1$ Pozitif x değeri 4 tür.

ÖRNEK 16.

$f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $(f + f')(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$(f+f')(1) = f(1) + f'(1)$

$f(1) = 1-1+1-1+1-1+1 = 1$

$f'(x) = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + 6x^5$

$f'(1) = -1+2-3+4-5+6 = 3$

$(f+f')(1) = 1+3 = 4$

ÖRNEK 17.

$f(x) = 2x^2 - f'(1)$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f(3) kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 4x \Rightarrow f'(1) = 4$

$f(x) = 2x^2 - 4$

$f(3) = 18 - 4 = 14$

ÖRNEK 18.

P(x), ikinci dereceden başkatsayısı 1 olan bir polinomdur.

$P(-1) = P(3)$

olduğuna göre, $P'(4)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$P(x) = x^2 + bx + c$

$P(-1) = 1 - b + c$

$P(3) = 9 + 3b + c$

$1 - b + c = 9 + 3b + c$

$4b = -8 \Rightarrow b = -2$

$P'(x) = 2x + b \Rightarrow P'(4) = 8 - 2 = 6$

ÖRNEK 19.

$f(x) = x^3 - 12x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12$

fonksiyonu veriliyor.

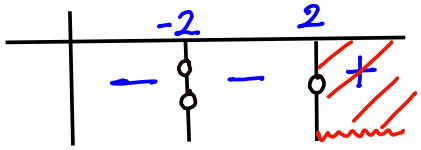
Buna göre,

$(x + 2) \cdot f'(x) > 0 \Rightarrow (x+2).(3x^2-12) > 0$

eşitsizliğinin en geniş çözüm aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$x = -2, \quad x = 2, \quad x = -2$



Ç.K = $(2, \infty)$

ÖRNEK 20.

Tüm katsayıları birbirine eşit olan üçüncü dereceden bir P(x) polinomu için,

$P'(1) = -12$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, P(–1) kaçtır?

ÇÖZÜM

$P(x) = ax^3 + ax^2 + ax + a$

$P'(x) = 3ax^2 + 2ax + a$

$P'(1) = 3a + 2a + a = -12 \Rightarrow a = -2$

$P(-1) = 2 - 2 + 2 - 2 = 0$

15. 4	16. 4	17. 14	18. 6	19. (2, ∞)	20. 0

ACİL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

Köklü İfadelerin Türevi

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

u = u(x) olmak üzere,

$$f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{u^m} = u^{\frac{m}{n}}$$

$$f'(x) = \frac{m}{n} u^{\frac{m-n}{n}} \cdot u'$$

veya

$$f'(x) = \frac{m}{n} \frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-m}}} \text{ dir.}$$

ÖRNEK 21.

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

ÖRNEK 22.

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$f'(1) = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2\sqrt{1+1}} = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

ÖRNEK 23.

$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}$

olduğuna göre, $f'(0)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x+1}}}$$

$$f'(0) = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{4}$$

YANINDA BULUNSUN

İki Fonksiyonun Çarpımının Türevi

f ve g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilen fonksiyonlar olsun,

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

Birinci fonksiyonun türevi çarpı ikinci fonksiyonun kendisi artı ikinci fonksiyonun türevi çarpı birinci fonksiyonun kendisi.

ÖRNEK 24.

$f(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (x^3 - x + 1)$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = (2x+1).(x^3 - x + 1) + (x^2 + x + 1).(3x^2 - 1)$$

$$f'(2) = 5.7 + 7.11$$

$$= 35 + 77$$

$$= 112$$

21. $\frac{5}{6}$	22. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$	23. $\frac{3}{4}$	24. 112

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 25.

f ve g fonksiyonları için,

$f(x) = (x - 3) \cdot g(x)$

$g(1) = g'(1) = 4$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 1 \cdot g(x) + (x-3) \cdot g'(x)$

$f'(1) = g(1) - 2 \cdot g'(1)$

$= 4 - 8$

$= -4$

ÖRNEK 26.

$f(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$g(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$ olsun.

$f(x) = (x-2) \cdot g(x)$

$f'(x) = 1 \cdot g(x) + (x-2) \cdot g'(x)$

$f'(2) = g(2) = 2 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -2 = 4$

YANINDA BULUNSUN

İki Fonksiyonun Bölümünün Türevi

f ve g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ türevlenebilen fonksiyonlar olsun,

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2} \text{ dir.}$$

Payın türevi çarpı payda eksi paydanın türevi çarpı pay bölü paydanın karesidir.

ÖRNEK 27.

f : $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(3)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x-2) - (3x-1) \cdot 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(3) = \frac{-5}{(3-2)^2}$$

$f'(3) = -5$

ÖRNEK 28.

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - (x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{2 - (-2) \cdot (-2)}{2^2} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

ÖRNEK 29.

f ve g fonksiyonları için,

$f(3) = g'(3) = -2$

$f'(3) = g(3) = 4$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $\left(\frac{f}{g}\right)'(3)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\frac{f'(3) \cdot g(3) - f(3) \cdot g'(3)}{g^2(3)} = \frac{4 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{4^2}$$

$= \frac{12}{16}$

$= \frac{3}{4}$

25. –4	26. 4	27. –5	28. $\frac{-1}{2}$	29. $\frac{3}{4}$

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

$y = [f(x)]^n$ Türündeki Türevler

$y = [f(x)]^n$ olmak üzere,

$y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$ tir.

Örneğin;

- $y = f^2(x)$ ise $y' = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$
- $y = f^3(x)$ ise $y' = 3 \cdot f^2(x) \cdot f'(x)$
- $y = (2x^2 + 1)^4$ ise $y' = 4 \cdot (2x^2 + 1)^3 \cdot 4x$

ÖRNEK 30.

$f(x) = (2x^2 - x - 4)^3$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = (4x-1) \cdot 3 \cdot (2x^2-x-4)^2$

$f'(2) = 7 \cdot 3 \cdot 2^2$

$= 84$

ÖRNEK 31.

$f(x) = (x^2 + x - 1)^3 \cdot (3x - 1)$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(-2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = (2x+1) \cdot 3 \cdot (x^2+x-1)^2 \cdot (3x-1) + (x^2+x-1)^3 \cdot 3$

$f'(-2) = -3 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot -7 + 1^3 \cdot 3$

$= 63 + 3$

$= 66$

ÖRNEK 32.

$f : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{(x-1)}{(2x-1)^3}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-1) - (x-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot (2x-1)^2}{(2x-1)^6}$$

$$f'(1) = \frac{1 - 0}{1^6} = 1$$

ÖRNEK 33.

$f(x) = (2x-1)^3 \cdot \sqrt{x^2+1}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = 2 \cdot 3(2x-1)^2 \cdot \sqrt{x^2+1} + (2x-1)^3 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$f'(0) = 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 + (-1)^3 \cdot 0$

$= 6$

ÖRNEK 34.

f ve g fonksiyonları için,

$g(x) = f^3(x) - x + 1$

$f(1) = 2 \cdot f'(1) = 4$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $g'(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$g'(x) = f'(x) \cdot 3 \cdot f^2(x) - 1$

$g'(1) = \underbrace{f'(1)}_{2} \cdot 3 \cdot \underbrace{f^2(1)}_{4^2} - 1$

$= 2 \cdot 3 \cdot 16 - 1$

$= 95$

30. 84	31. 66	32. 1	33. 6	34. 95

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 35.

$f : \mathbb{R} - \{6\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-6}}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(7)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{\frac{1.(x-6)-(x+1).1}{(x-6)^2}}{3.\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-6}\right)^2}}$$

$$f'(7) = \frac{\frac{1-8}{(7-6)^2}}{3.\sqrt[3]{\left(\frac{7+1}{7-6}\right)^2}} = \frac{-7}{3.4} = \frac{-7}{12}$$

YANINDA BULUNSUN

Bileşke Fonksiyonun Türevi

f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere,

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ tir.

Örneğin;

- $y = f(2x)$ ise $y' = f'(2x) \cdot 2$
- $y = (f \circ g)(x^2)$ ise $y' = f'(g(x^2)) \cdot g'(x^2) \cdot 2x$
- $y = f^2(\sqrt{x})$ ise $y' = 2 \cdot f(\sqrt{x}) \cdot f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ÖRNEK 36.

$f(x) = (x^2+1)^2 \Rightarrow f'(x) = 2x.2.(x^2+1)$

$g(x) = 2x - 1 \Rightarrow g'(x) = 2$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $(f \circ g)'(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$$(f \circ g)'(0) = g'(0).f'(g(0))$$

$$= g'(0).f'(-1)$$

$$= 2.(-2.2.2)$$

$$= -16$$

ÖRNEK 37.

$f(3x-4) = (x^2+x-1)^3$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$3.f'(3x-4) = (2x+1).3.(x^2+x-1)^2$

$x = 1$ için

$3.f'(-1) = 3.3.1^2 \Rightarrow f'(-1) = 3$

ÖRNEK 38.

f ve g fonksiyonları için

$f(2) = 2 \cdot f'(2) = 4$

$g'(4) = -3$

eşitlikleri veriliyor.

$h(x) = (g \circ f)(x)$

olduğuna göre, $h'(2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$h'(x) = f'(x).g'(f(x))$

$h'(2) = f'(2).g'(f(2))$

$h'(2) = 2.(-3)$

$h'(2) = -6$

ÖRNEK 39.

$f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = \frac{3}{x+1}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $f'(4)$ değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$f\left(1 - \frac{3}{x+1}\right) = \frac{3}{x+1}$$

$f(1-x) = x \Rightarrow -1.f'(1-x) = 1$

$x = -3$ için $f'(4) = -1$

35. $\frac{-7}{12}$	36. –16	37. 3	38. –6	39. –1

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 40.

$f(x^2) - f(2x) = (x^2 - 1)^2 + x$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, f'(4) kaçtır?

ÇÖZÜM

$2x \cdot f'(x^2) - 2 \cdot f'(2x) = 2x \cdot 2(x^2-1) + 1$

$x = 2$ için

$4 \cdot f'(4) - 2 \cdot f'(4) = 4 \cdot 2 \cdot 3 + 1$

$2 \cdot f'(4) = 25$

$f'(4) = \frac{25}{2}$

ÖRNEK 41.

f ve g fonksiyonları için,

$f^2(1 - 3x) = g(2x)$

eşitliği veriliyor.

$f(1) = g'(0) \neq 0$

olduğuna göre, f'(1) kaçtır?

ÇÖZÜM

$-3 \cdot f'(1-3x) \cdot 2 \cdot f(1-3x) = 2 \cdot g'(2x)$

$x = 0$ için

$-3 \cdot f'(1) \cdot 2 \cdot f(1) = 2 \cdot g'(0)$

$-3 \cdot f'(1) = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{3}$

ÖRNEK 42.

$h(x) = f(x + f(2x))$

fonksiyonu veriliyor.

$3 \cdot f'(1) = f(0) = f'(0) = 1$

olduğuna göre, h'(0) kaçtır?

ÇÖZÜM

$h'(x) = (1 + 2 \cdot f'(2x)) \cdot f'(x + f(2x))$

$h'(0) = (1 + 2 \underbrace{f'(0)}_{1}) \cdot f'(0 + \underbrace{f(0)}_{1})$

$= 3 \cdot f'(1)$

$= 1$

ÖRNEK 43.

$f(2x) = x^3 - 1 \rightarrow 2 \cdot f'(2x) = 3x^2$

$g(x - 1) = 1 - x^2$

fonksiyonları veriliyor.

$2 \cdot f'(4) = 12$

$f'(4) = 6$

Buna göre, $(g \circ f')(4)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$(g \circ f')(4) = g(\underbrace{f'(4)}_{6})$

$= g(6)$

$x = 7$ için $g(6) = 1 - 7^2$

$g(6) = -48$

ÖRNEK 44.

$f(x) = \frac{g(x^2)}{x}$

fonksiyonu veriliyor.

$g(1) = 0$ ve $g'(1) = 3$

olduğuna göre, f'(–1) kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = \frac{2x \cdot g'(x^2) \cdot x - g(x^2) \cdot 1}{x^2}$

$f'(-1) = 2 \underbrace{g'(1)}_{3} - \underbrace{g(1)}_{0}$

$f'(-1) = 6$

ÖRNEK 45.

$x \cdot f(2x) = (x^2 + 5x - 1)^2 \rightarrow f(2x) = \frac{(x^2+5x-1)^2}{x}$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, f'(–2) kaçtır?

ÇÖZÜM

$2 \cdot f'(2x) = \frac{(2x+5) \cdot 2(x^2+5x-1) \cdot x - (x^2+5x-1)^2 \cdot 1}{(x)^2}$

$x = -1$ için

$2 \cdot f'(-2) = 3 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot (-1) - (-5)^2 = 5$

$2 \cdot f'(-2) = 5 \Rightarrow f'(-2) = \frac{5}{2}$

40. $\frac{25}{2}$	41. $\frac{-1}{3}$	42. 1	43. –48	44. 6	45. $\frac{5}{2}$

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

Türevde Zincir Kuralı

y, u'ya bağlı; u, v'ye bağlı; v, x'e bağlı türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

y = f(u), u = g(v), v = h(x) olsun.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

olarak yazılır.

Bu kurala **"Türevde Zincir Kuralı"** denir.

ÖRNEK 46.

$y = u^2 - 2u$

$u = 3x^2 + 2x + 1$

fonksiyonları veriliyor.

Buna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ **değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= (2u-2).(6x+2)$

$x = 1 \Rightarrow u = 6$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = (2.6-2).(6.1+2) = 80$

ÖRNEK 47.

$y = u^2 - 2u + 5$

$u = t^2 - 5t + 3$

$t = 3x^2 - 2$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$ **değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$= (2u-2).(2t-5).(6x)$

$x = -1 \Rightarrow t = 1, u = -1$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -4.-3.-6 = -72$

YANINDA BULUNSUN

Bir Fonksiyonun İkinci Türevi

y = f(x) ve y = f'(x) fonksiyonları türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

f(x) fonksiyonunun ikinci türevi

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

şeklinde gösterilir.

ÖRNEK 48.

$f(x) = 4x^4 + 5x^2 - x - 7$

fonksiyonunun ikinci türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 16x^3 + 10x - 1$

$f''(x) = 48x^2 + 10$

ÖRNEK 49.

$f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + x^2 - x + 1$$

olduğuna göre, f''(1) kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = -2x^{-3} + 2x - 1$

$f''(x) = 6x^{-4} + 2$

$f''(1) = 6 + 2 = 8$

46. 80	47. –72	48. $48x^2 + 10$	49. 8

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 50.

$f: \mathbb{R}-\left\{\frac{-1}{2}\right\} \to \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$f(x)=\frac{2x-1}{4x+2}$$

olduğuna göre, $f''(0)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x)=\frac{2.(4x+2)-(2x-1)4}{(4x+2)^2}=\frac{8}{(4x+2)^2}=8.(4x+2)^{-2}$

$f''(x)=8.4.(-2).(4x+2)^{-3}$

$f''(0)=8.4.(-2).2^{-3}=-8$

ÖRNEK 51.

$f(x)=ax^3-3ax^2+x+b$

fonksiyonu veriliyor.

$f(1)=-2$ ve $f'(-1)=19$

olduğuna göre, $f''(1)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x)=3ax^2-6ax+1$

$f'(-1)=19 \Rightarrow 3a+6a+1=19 \Rightarrow a=2$

$f''(x)=12x-12$

$f''(1)=12-12=0$

ÖRNEK 52.

P(x) üçüncü dereceden bir polinomdur.

P(x) polinomunun $(x-2)^3$ ile bölümünden kalan x'tir.

P(1) = –1 olduğuna göre,

$$\left.\frac{d^2(P(x))}{dx^2}\right|_{x=3}$$

değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$P(x)=a.(x-2)^3+x$

$P(1)=-1 \Rightarrow -a+1=-1 \Rightarrow a=2$

$P'(x)=2.3(x-2)^2+1$

$P''(x)=2.3.2.(x-2)$

$P''(3)=2.3.2.1=12$

YANINDA BULUNSUN

Türevin Fiziksel Anlamı

x: yol ve t: zaman olmak üzere,

x = f(t) fonksiyonu ile yol alan bir hareketlinin $[t_1, t_2]$ aralığındaki ortalama hızı;

$$v_{ort}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1} \text{ dir.}$$

Herhangi bir t anındaki yolun zamana göre değişimine **Anlık Hız** denir. $\frac{dx}{dt}$ ile gösterilir.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=f'(t)=v(t)$$

t anındaki yolun zamana göre türevi o andaki hızı verir.

Hızın birim zamandaki değişimine **İvme** denir ve a ile gösterilir.

Hızı v olan bir hareketlinin herhangi bir t anındaki anlık ivmesi

$$a=\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}=v'(t)=a$$

Hızın zamana göre türevi ivmeyi verir.

ÖRNEK 53.

Bir hareketlinin t saniyede aldığı yol,

$x=(2t^2+2t+1)$

metre olduğuna göre,

a) **Hareketlinin 3 saniyede aldığı yolu,**

b) **Hareketlinin 3. saniyedeki hızını,**

c) **Hareketlinin 3. saniyedeki ivmesini bulunuz.**

ÇÖZÜM

a) $x(3)=2.3^2+2.3+1=25$

b) $x'(t)=4t+2 \Rightarrow x'(3)=4.3+2=14$

c) $x''(t)=4$

50. –8	51. 0	52. 12	53. a) 25 b) 14 c) 4

ÖRNEK 54.

Bir hareketlinin zamana göre yol denklemi,

$x = (3t^3 + t^2 - 2t + 5)$ m'dir.

Bu hareketlinin 2. saniyedeki ivmesi kaç m/sn² dir?

ÇÖZÜM

$x'(t) = v(t) = 9t^2 + 2t - 2$

$x''(t) = a(t) = 18t + 2$

$a(2) = 18 \cdot 2 + 2 = 38$

YANINDA BULUNSUN

Sağdan ve Soldan Türev

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in (a, b)$ olsun.

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

değeri varsa, bu değere f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sağdan türevi denir ve $f'(x_0^+)$ şeklinde gösterilir.

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

değeri varsa, bu değere f fonksiyonunun x_0 noktasındaki soldan türevi denir ve $f'(x_0^-)$ şeklinde gösterilir.

f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olmak üzere,

- $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = c \in \mathbb{R}$ ise f fonksiyonunun x_0 noktasında türevi vardır.
- f fonksiyonunun x_0 noktasında türevi varsa, $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ dir.
- $f'(x_0^+) \neq f'(x_0^-)$ ise f fonksiyonunun x_0 noktasında türevi yoktur.

ÖRNEK 55.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 2 \\ 6x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun x = 2 noktasındaki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ sürekli

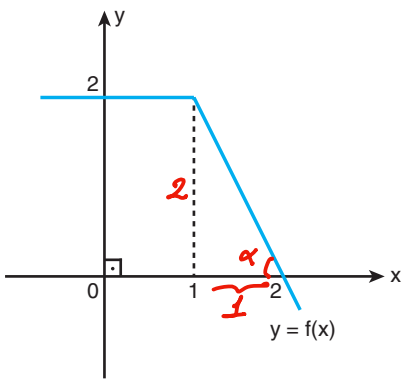
$\lim_{x \to 2^+} \frac{6x - 4 - (2^2 + 2 \cdot 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{6x - 12}{x - 2} = 6$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + 2x - (2^2 + 2 \cdot 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{(x+4)(x-2)}{x-2} = 6$

$f'(2) = 6$

ÖRNEK 56.

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $f'(1^+) + f'(1^-)$ toplamının sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(1^+) = -\tan\alpha$, $f'(1^-) = 0$

$f'(1^+) = -2$

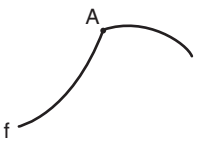
$f'(1^+) + f'(1^-) = -2 + 0 = -2$

54. 38	55. 6	56. –2

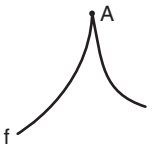
YANINDA BULUNSUN

Türev - Süreklilik İlişkisi

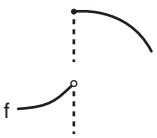
- Bir f(x) fonksiyonu x = a noktasında türevli ise bu noktada süreklidir.
- Ancak f(x) fonksiyonunun x = a noktasında sürekli olması bu noktada türevli olduğu anlamına gelmez.
- f(x) fonksiyonu x = a noktasında sürekli değilse bu noktada türevli değildir.
- Bir fonksiyon x = a noktasında türevli ise a noktasında sağdan ve soldan türevleri eşittir.

i. 

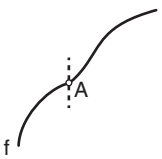
Bir köşe noktasında sağdan ve soldan türevler farklıdır. Fonksiyonun A noktasında türevi yoktur.

ii. 

Bir sivri uçta teğetin eğimleri farklıdır. Fonksiyonun A noktasında türevi yoktur.

iii. 

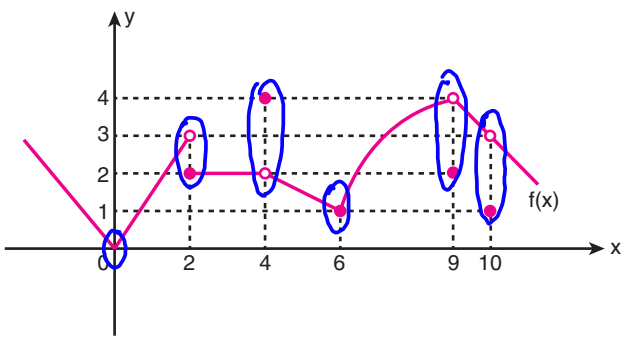
f, bir noktada süreksiz ise süreksiz olduğu noktada türevi yoktur.

iv. 

f, A noktasında tanımsız olduğu için bu noktada türevi yoktur.

ÖRNEK 57.

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun kaç noktada türevi yoktur?

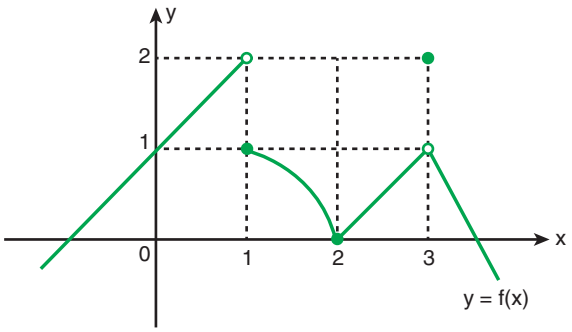
ÇÖZÜM

0, 2, 4, 6, 9, 10 noktalarında türev yoktur.

6 noktada

ÖRNEK 58.

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



f fonksiyonunun;

- Sürekli olup türevsiz olduğu nokta a,
- Limitinin var olup süreksiz olduğu nokta b'dir.

Buna göre, a + b toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

a = 2 , b = 3

a + b = 2 + 3

a + b = 5

57. 6	58. 5

YANINDA BULUNSUN

Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonların Türevi

- Parçalı fonksiyonların türevi araştırılırken fonksiyonun kritik noktalardaki sağdan ve soldan türevlerine bakılır.
- Mutlak değerli fonksiyonun türevi araştırılırken istenilen nokta kritik nokta ise sağdan ve soldan türevlere bakılır. Eğer nokta kritik nokta değilse mutlak değer işaretine göre incelenir.

ÖRNEK 59.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geq 1 \\ 2x-1, & x<1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\geq 1 \\ 2, & x<1 \end{cases}$$

fonksiyonunun x = 1 noktasındaki türevini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 1} f'(x)=f'(1)$

$f'(1^+)=2$
$f'(1^-)=2$
$\Big\} \; f'(1)=2$

ÖRNEK 60.

$$f(x)=\begin{cases} x^3-1, & x<-1 \\ 3x+1, & x\geq -1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

$$\frac{f'(-2)+f'(-1)}{f'(2)}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x<-1 \\ 3, & x\geq -1 \end{cases}$$

$$\frac{f'(-2)+f'(-1)}{f'(2)}=\frac{3.(-2)^2+3}{3}=5$$

ÖRNEK 61.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+a, & x<2 \\ bx^2-1, & x\geq 2 \end{cases}$$

fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}$ için türevlidir.

Buna göre, a + b toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$

$2.2+a=b.2^2-1 \Rightarrow 4b-a=5$

$f'(x)=\begin{cases} 2, & x<2 \\ 2bx, & x\geq 2 \end{cases}$

$2b.2=2 \Rightarrow b=1/2$

$b=1/2 \Rightarrow a=-3 \longrightarrow a+b=\frac{1}{2}-3=\frac{-5}{2}$

ÖRNEK 62.

$f(x)=|x-2|$

fonksiyonunun,

a) $x=1$

b) $x=2$

c) $x=5$

noktalarındaki türevlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $f(x)=-x+2$

$f'(x)=-1 \Rightarrow f'(1)=-1$

b) $f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\leq 2 \\ x-2, & x>2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} -1, & x<2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$

$f'(2)$ yoktur.

c) $f(x)=x-2 \Rightarrow f'(x)=1$

$f'(5)=1$

59. 2	60. 5	61. $\frac{-5}{2}$	62. a) –1 b) Yoktur c) 1

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 63.

$f(x) = |x^2 - x - 20| = |(x-5).(x+4)|$

fonksiyonunun,

a) $x = 3$

b) $x = 5$

c) $x = -5$

noktalarındaki türevlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $f(x) = -x^2+x+20 \Rightarrow f'(x) = -2x+1 \Rightarrow f'(3) = -5$

b) $f'(5^+) = 9$, $f'(5^-) = -9$ } $f'(5)$ yoktur.

c) $f(x) = x^2-x-20 \Rightarrow f'(x) = 2x-1 \Rightarrow f'(-5) = -11$

ÖRNEK 64.

$f(x) = |x^2 - 6x + 9|$

fonksiyonunun x = 3 noktasındaki türevi kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = |(x-3)^2|$

$f'(3^+) = 0$, $f'(3^-) = 0$

$f'(3) = 0$

ÖRNEK 65.

$$f(x) = \begin{cases} |x-2|+3, & x < 4 \\ 2x-3, & x \geq 4 \end{cases}$$

fonksiyonunun türevsiz olduğu apsis değerleri toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$x=2$ de türev yoktur.

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = f(4)$

$f'(4^-) = -1$, $f'(4^+) = 2$ } $f'(4)$ yoktur.

$2+4=6$

YANINDA BULUNSUN

n pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$f(x) = |(ax + b)^n|$ fonksiyonunda,

n = 1 için $f'\left(\frac{-b}{a}\right)$ yoktur.

$n \geq 2$ için fonksiyonun $x = \frac{-b}{a}$ noktasında türevi vardır ve sıfıra eşittir.

ÖRNEK 66.

$f(x) = x^2 + 4x + a$

fonksiyonu veriliyor.

y = |f(x)| fonksiyonu her noktada türevli olduğuna göre, a'nın alabileceği en küçük iki tam sayı değeri toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$\Delta \leq 0$ olmalıdır.

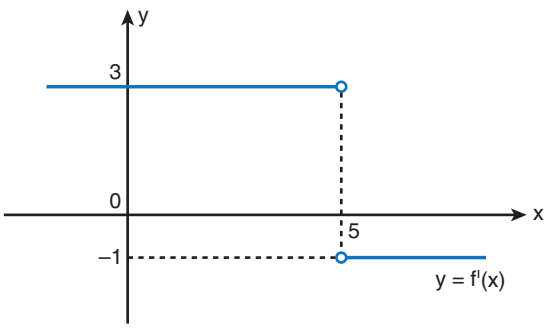
$4^2 - 4.1.a \leq 0 \Rightarrow a \geq 4$

$4+5=9$

ÖRNEK 67.

f fonksiyonu gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur.

f fonksiyonunun türevine ait grafik aşağıda gösterilmiştir.



Buna göre, f(6) – f(3) farkı kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = \begin{cases} 3, & x<5 \\ -1, & x>5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x+c_1, & x<5 \\ -x+c_2, & x>5 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5) \Rightarrow 3.5+c_1 = -5+c_2$

$c_2 - c_1 = 20$

$f(6) - f(3)$

$(-6+c_2) - (9+c_1)$

$-15 + c_2 - c_1 = 5$

20

63. a) –5 b) Yoktur. c) –11	64. 0	65. 6	66. 9	67. 5

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

L'hospital Kuralı

Bu kural müfredat programında olmamasına rağmen limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliklerinde kolaylık sağlar.

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ oluyorsa pay ve paydanın ayrı ayrı türevleri alınarak ifade belirsizlikten kurtarılır.

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=L\in\mathbb{R}$$

oluyorsa limitin değeri L'dir.

ÖRNEK 68.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-x^2}{x^2+5x-6}\right)=\frac{0}{0}$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 1}\frac{-2x}{2x+5}=\frac{-2}{7}$$

ÖRNEK 69.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x^3}-1}{x-1}\right)=\frac{0}{0}$$

limitinin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{-3}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-3.x^{-4}}{1}$$

$$=-3$$

ÖRNEK 70.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{2-x}\right)=\frac{0}{0}$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}}{-1}=\frac{-1}{2.\sqrt{9}}=\frac{-1}{6}$$

ÖRNEK 71.

$f(x)=x^2+x-6 \Rightarrow f'(x)=2x+1$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x+1)}{f(x-4)}=\frac{f(2)}{f(-3)}=\frac{0}{0}$$

limitinin sonucu kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x+1)}{f'(x-4)}=\frac{f'(2)}{f'(-3)}=\frac{5}{-5}=-1$$

ÖRNEK 72.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{x^2-1}\right)=\frac{0}{0}$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{2x}=\frac{-1}{6}$$

68. $\frac{-2}{7}$	69. -3	70. $\frac{-1}{6}$	71. -1	72. $\frac{-1}{6}$

1. $f(x) = x^3 + 2x - 5$

fonksiyonunun [0, 4] aralığındaki ortalama değişim oranı kaçtır?

A) 24 B) 20 C) 18 D) 16 E) 12

$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{67-(-5)}{4}$$
$$= \frac{72}{4}$$
$$= 8$$

2. f bir doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$f'(2) = f(3)$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, f(2) kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

$f(x)=ax+b \Rightarrow f'(x)=a$

$f'(2)=f(3) \Rightarrow a=3a+b$
$b=-2a$

$f(2)=2a+b \Rightarrow f(2)=0$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x+7}$

fonksiyonu veriliyor.

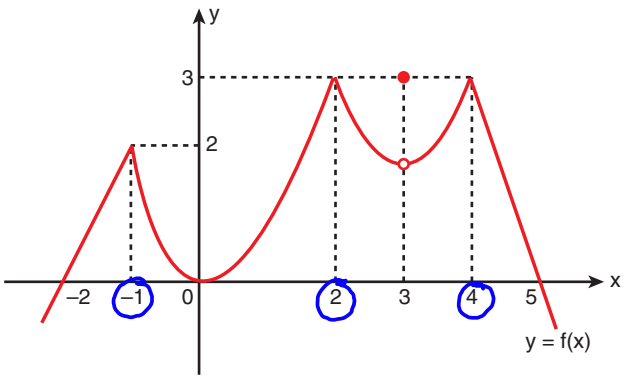
Buna göre, f'(1) kaçtır?

A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

$$f'(x) = \frac{1}{3.\sqrt[3]{(x+7)^2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{3.\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12}$$

4.



Şekilde, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, fonksiyonun sürekli olmasına rağmen türevsiz olduğu apsisler toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

$(-1)+2+4=5$

5. $f(x) + f(2x - 1) = x^2 + 3x + 5$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, f'(1) kaçtır?

A) 1 B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{8}{3}$

$f'(x)+2.f'(2x-1)=2x+3$

$f'(1)+2.f'(1)=5$

$3.f'(1)=5 \Rightarrow f'(1)=\frac{5}{3}$

6. $f(2x) = (x + 2) \cdot g(x) + x - 2$

eşitliği veriliyor.

g(1) = g'(1) = 2 olduğuna göre, f'(2) kaçtır?

A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) 4 E) $\frac{9}{2}$

$2.f'(2x)=g(x)+(x+2).g'(x)+1$

$2.f'(2)=\frac{g(1)}{2}+3.\frac{g'(1)}{2}+1$

$2.f'(2)=9 \Rightarrow f'(2)=\frac{9}{2}$

AÇIL MATEMATİK

7. $y = x^2 - 2$

$x = 2t^2 + t + 1$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dt}$'nin t = 1 için değeri kaçtır?

A) 12 B) 18 C) 24 D) 32 E) 40

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$= 2x \cdot (4t+1)$

$t=1 \Rightarrow x=4$

$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = 2.4.5 = 40$

8. $f : \mathbb{R} - \{-5\} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f\left(\frac{3x-1}{x+5}\right) = 4x + 1$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f'(1) kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 24

$\frac{3.(x+5)-(3x-1).1}{(x+5)^2} \cdot f'\left(\frac{3x-1}{x+5}\right) = 4$

$x=3$ için

$\frac{16}{8^2} \cdot f'(1) = 4 \Rightarrow f'(1) = 16$

$\frac{16}{8^2} = \frac{4}{4}$

9. Bir f fonksiyonu için,

$f(a - 2x) = x^2 - 5x + 1$

$f'(5) = \frac{7}{2}$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

$-2 \cdot f'(a-2x) = 2x - 5$

$a - 2x = 5 \Rightarrow 2x = a - 5$

$-2 \cdot f'(5) = a - 5 - 5$

$-2 \cdot \frac{7}{2} = a - 10$

$-7 = a - 10 \Rightarrow a = 3$

10. $f : \left[\frac{-1}{5}, \infty\right) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+4} + x}$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f'(0) kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) 1 E) $\frac{3}{2}$

$f'(x) = \frac{\frac{2x.(x^2+4)-(x^2+1).2x}{(x^2+4)^2} + 1}{2.\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+4}+x}}$

$f'(0) = \frac{0+1}{2.\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2.\frac{1}{2}} = 1$

11. x ekseni üzerinde, pozitif yönde hareket eden bir parçacığın t anındaki konumu,

$x(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 3$

ile gösterilmektedir.

Bu parçacığın t = 1 anındaki ivmesi kaçtır?

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

$x'(t) = v(t) = 3t^2 + 4t + 2$

$x''(t) = a(t) = 6t + 4$

$a(1) = 6 + 4 = 10$

12. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 2 \\ x^2 - ax + b, & x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2, & x<2 \\ 2x-a, & x>2 \end{cases}$

fonksiyonunun x = 2 noktasında türevi olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) \to 5 = 4 - 2a + b \Rightarrow b - 2a = 1$

$4 - a = 2 \Rightarrow a = 2, \; b = 5$

$a + b = 2 + 5 = 7$

1. C	2. C	3. B	4. D	5. C	6. E
7. E	8. D	9. C	10. D	11. A	12. E

AÇIL MATEMATİK

1. $f(x) = x^3 - ax^2 + x + a$

fonksiyonu için

$f''(1) = f'(2)$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, a kaçtır?

A) 5 B) $\frac{9}{2}$ C) 4 D) $\frac{7}{2}$ E) 3

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 1$

$f''(x) = 6x - 2a$

$f''(1) = f'(2) \Rightarrow 6 - 2a = 12 - 4a + 1$

$2a = 7$

$a = 7/2$

2. f bir doğrusal fonksiyon olmak üzere,

$f'(-1) = f(-1)$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, $\frac{f(5)}{f(1)}$ oranı kaçtır?

A) $\frac{7}{3}$ B) 2 C) $\frac{5}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

$f(x) = ax + b$

$f'(x) = a$

$f'(-1) = f(-1) \Rightarrow a = -a + b \Rightarrow b = 2a$

$\frac{f(5)}{f(1)} = \frac{5a+b}{a+b} = \frac{7a}{3a} = \frac{7}{3}$

3. $f(2x - 1) = 3x^2 + x + g(3 - 2x)$

eşitliği veriliyor.

Buna göre,

$f'(1) + g'(1)$

toplamı kaçtır?

A) $\frac{7}{2}$ B) 4 C) $\frac{9}{2}$ D) 5 E) $\frac{11}{2}$

$2 \cdot f'(2x-1) = 6x + 1 - 2 \cdot g'(3-2x)$

$x = 1$ için

$2 \cdot f'(1) = 7 - 2g'(1)$

$2 \cdot [f'(1) + g'(1)] = 7 \Rightarrow f'(1) + g'(1) = \frac{7}{2}$

4. $f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$ ve

$f'(3) = 6$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 2

$g(x)$

$f(x) = a \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-4) \cdot g(x)$

$f'(x) = [a \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-4)]' \cdot g(x) + a \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-4) \cdot g'(x)$

$x - 3$ $\qquad$ 1

$f'(3) = 0 + a \cdot 2 \cdot 1 \cdot -1 = 6$

$-2a = 6 \Rightarrow a = -3$

5. $g(x) = \frac{2x + 1}{f(x)}$

eşitliği veriliyor.

$f(3) = -2$ ve $f'(3) = 4$

olduğuna göre, $g'(3)$ kaçtır?

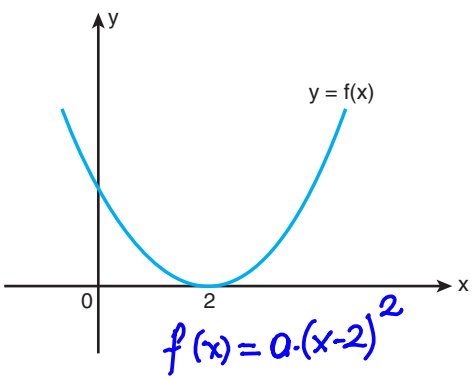
A) –16 B) –12 C) –8 D) –6 E) –4

$g'(x) = \frac{2 \cdot f(x) - (2x+1) \cdot f'(x)}{f^2(x)}$

$g'(3) = \frac{2 \cdot f(3) - 7 \cdot f'(3)}{f^2(3)} = \frac{2 \cdot -2 - 7 \cdot 4}{(-2)^2}$

$= \frac{-32}{4} = -8$

6. Aşağıda f parabolünün grafiği gösterilmiştir.



$f(x) = a \cdot (x-2)^2$

$f'(4) = 12$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

A) 12 B) 6 C) 4 D) 2 E) 1

$f'(x) = 2a(x-2) \Rightarrow f'(4) = 2a \cdot 2 = 12$

$a = 3$

$f(0) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$

7. f bir çift fonksiyon olmak üzere, → f' tek fonk.

$$f(x) + f(3x - 8) = x^2 - \frac{1}{x^2} + 4$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, f'(2) kaçtır?

A) –1 B) $\frac{-5}{3}$ C) $\frac{-8}{5}$ D) $\frac{-12}{7}$ E) $\frac{-17}{8}$

$f'(x) + 3 \cdot f'(3x-8) = 2x + \frac{2}{x^3}$

$x = 2$ için

$f'(2) + 3 \cdot f'(-2) = 4 + \frac{2}{8}$

$-f'(2)$

$-2 \cdot f'(2) = 17/4 \Rightarrow f'(2) = -\frac{17}{8}$

8. $f(x) = x^3 - 2x^2 + f'(1)$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, f(–1) kaçtır?

A) –6 B) –4 C) –3 D) –2 E) –1

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f'(1) = 3 - 4 = -1$

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

$f(-1) = -1 - 2 - 1 = -4$

9. $f(x) = |x^2 + ax + 8|$

fonksiyonu tüm gerçel sayılarda türevlenebilir olduğuna göre, a'nın alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerleri çarpımı kaçtır?

A) –9 B) –16 C) –25 D) –36 E) –49

$\Delta \leq 0$

$a^2 - 4 \cdot 8 \leq 0 \Rightarrow a^2 \leq 32$

$-4\sqrt{2} \leq a \leq 4\sqrt{2}$

$5 \cdot (-5) = -25$

10. $\lim_{x \to -1} \left(\frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 - 3x - 4} \right) = \frac{0}{0}$

limitinin değeri kaçtır?

A) $\frac{-1}{20}$ B) $\frac{-1}{12}$ C) $\frac{-1}{9}$ D) $\frac{-1}{6}$ E) $\frac{-1}{3}$

$\lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+5}}}{2x-3} = \frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{4}}}{-5}$

$= \frac{-1}{20}$

11. $g \circ g^{-1}(4x) = f(2x + 1)$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, (g ∘ f)'(3) kaçtır?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{5}{3}$ E) 2

$(g \circ f)(2x+1) = 4x$

$2 \cdot (g \circ f)'(2x+1) = 4$

$x = 1$ için

$(g \circ f)'(3) = \frac{4}{2} = 2$

12. P(x); bir polinom olmak üzere,

$P(x) + P'(x) = x^2 + 4x + 6$ dır.

Buna göre, P'(3) kaçtır?

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P'(x) = 2ax + b$

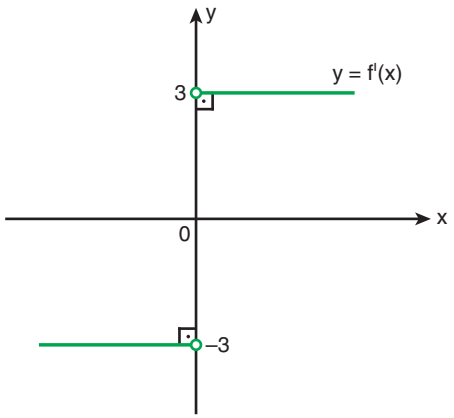
$P(x) + P'(x) = \underbrace{a}_{1}x^2 + \underbrace{(b+2a)}_{4}x + \underbrace{b+c}_{6}$

$a = 1, \; b = 2, \; c = 4$

$P'(x) = 2x + 2 \Rightarrow P'(3) = 8$

ACİL MATEMATİK

13. Aşağıda gerçel sayılar kümesinde sürekli olan bir f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



f(–2) = 2 olduğuna göre, f(7) kaçtır?

A) 24 B) 20 C) 18 D) 17 E) 16

$f'(x) = \begin{cases} -3 & , x<0 \\ 3 & , x>0 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} -3x+c_1 & , x<0 \\ 3x+c_2 & , x>0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow c_1 = c_2$

$f(-2) = 6+c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = -4$

$f(7) = 21+c_2 = 21-4 = 17$

14. $f(x) = 1 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

olmak üzere, $(f \circ f \circ f)'(1)$ kaçtır?

A) 100 B) 90 C) 80 D) 60 E) 40

$f'(1).(f\circ f)'(f(1))$ (2)

$f'(1).\ f'(2).\ f'(f(2))$ (5)

$\underbrace{2}\ .\ \underbrace{4}\ .\ \underbrace{10} = 80$

15. $\lim_{x\to 4} \dfrac{4-x}{x+\sqrt{x}-6}$ $\dfrac{0}{0}$

limitinin sonucu kaçtır?

A) $\frac{-1}{2}$ B) $\frac{-2}{3}$ C) $\frac{-3}{4}$ D) $\frac{-4}{5}$ E) $\frac{-5}{6}$

$\lim_{x\to 4} \dfrac{-1}{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \dfrac{-1}{1+\frac{1}{4}}$

$= -\dfrac{4}{5}$

16. f, türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+f(x)}{x^2-4} = 6$ $\dfrac{0}{0}$ olmalı

$\lim_{x\to 2} \dfrac{2x+f'(x)}{2x} = 6$

olduğuna göre,

$\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)+4}{x-2}$

$\dfrac{4+f'(2)}{4} = 6$

limitinin değeri kaçtır?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

$4+f'(2) = 24 \Rightarrow f'(2) = 20$

$\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)+4}{x-2}$ $\dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 2} \dfrac{f'(x)}{1} = f'(2)$

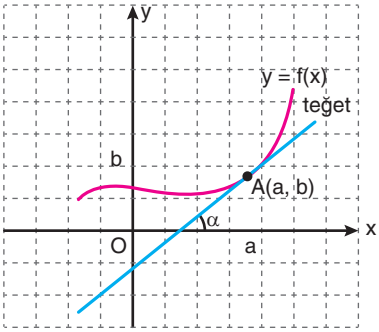
$= 20$

1. D	2. A	3. A	4. B	5. C	6. A	7. E	8. B
9. C	10. A	11. E	12. A	13. D	14. C	15. D	16. B

ACİL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

TÜREVİN UYGULAMALARI
Türevin Geometrik Yorumu



m = Eğim
m_T = Teğet doğrusunun eğimi

$m = \tan\alpha$

$m_T = f'(a)$

Bir fonksiyonun herhangi bir a noktasındaki türevinin o noktadaki teğetinin eğimi olduğunu görmüştük.

Eğimi ve $A(x_1, y_1)$ noktası belli bir doğru denklemi:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

A noktasındaki teğet denklemi:

$$y - b = f'(a)(x - a)$$

ÖRNEK 1.

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

eğrisine x = 1 apsisli noktasından çizilen teğetinin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

$f'(1) = 3 + 4 - 3$

$f'(1) = 4$

ÖRNEK 2.

$f(x) = \sqrt{7 + \sqrt{x}}$

fonksiyonunun grafiğine x = 4 apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2.\sqrt{7+\sqrt{x}}}$$

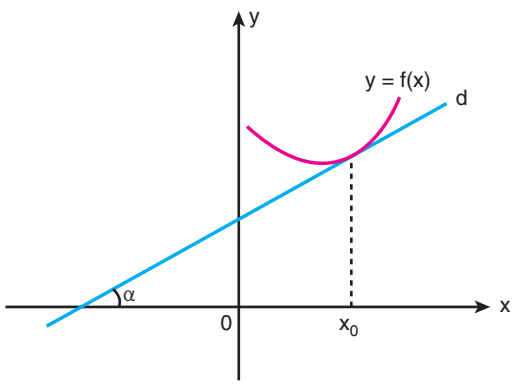
$$f'(4) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{4}}}{2.\sqrt{7+\sqrt{4}}} = \frac{\frac{1}{2.2}}{2.\sqrt{9}} = \frac{1}{24}$$

(2, 3)

YANINDA BULUNSUN

Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği ve bu grafiğe $x = x_0$ apsisli noktasında çizilen teğeti olan d doğrusu verilmiştir.

d doğrusu x ekseni ile pozitif yönde α derecelik açı yapmaktadır.



f fonksiyonunun $x = x_0$ apsisli noktasındaki türevinin değeri, fonksiyona $x = x_0$ apsisli noktasında çizilen teğeti olan d doğrusunun eğimine eşittir.

d doğrusunun eğimi m olmak üzere,

$$f'(x_0) = \tan\alpha = m \text{ dir.}$$

Bu durumda,

$0 < \alpha < 90°$ ise $\tan\alpha > 0$ olduğundan $f'(x_0) > 0$ olur.

$90° < \alpha < 180°$ ise $\tan\alpha < 0$ olduğundan $f'(x_0) < 0$ olur.

Yani, α dar açı ise $f'(x_0) > 0$

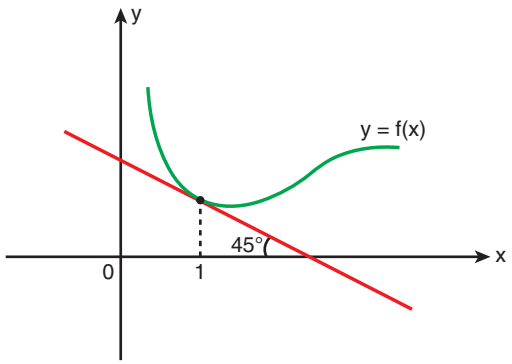
α geniş açı ise $f'(x_0) < 0$ olur.

1. 4	2. $\frac{1}{24}$

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 3.

Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun ve bu fonksiyonun grafiğine x = 1 apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun grafiği gösterilmiştir.



Buna göre,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$$

limitinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(1) = -\tan 45°$

$f'(1) = -1$

YANINDA BULUNSUN

- y = mx + n biçiminde verilen bir doğrunun eğimi m'dir.
- ax + by + c = 0 biçiminde verilen bir doğrunun eğimi $m = \frac{-a}{b}$ olur.
- Grafiği verilen bir doğrunun eğimi, bu doğrunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α olmak üzere, m = tanα olur.
- $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur.
- d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri sırasıyla m_1 ve m_2 olmak üzere,
  $d_1 // d_2$ ise $m_1 = m_2$ dir.
  $d_1 \perp d_2$ ise $m_1 \cdot m_2 = -1$ dir.
- $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğrunun denklemi, $y - y_0 = m(x - x_0)$ olur.

ÖRNEK 4.

$f(x) = x^3 - ax^2 + 3x + 2$

fonksiyonunun grafiğine x = 1 ve x = 2 apsisli noktalarından çizilen teğet doğruları birbirine paraleldir.

Buna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3$

$f'(1) = f'(2) \Rightarrow 3 - 2a + 3 = 12 - 4a + 3$

$2a = 9$

$a = 9/2$

ÖRNEK 5.

$f(x) = x^2 + ax + a - 1$

fonksiyonunun grafiğinin x = 1 apsisli noktasındaki teğeti 2x + y + 1 = 0 doğrusuna paraleldir.

Buna göre, f(2) kaçtır?

$m = -2$

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x + a$

$f'(1) = 2 + a$

$a + 2 = -2 \Rightarrow a = -4$

ÖRNEK 6.

$f(x) = x^2 + mx + 6$ parabolünün x = 3 apsisli noktasındaki teğeti,

$y = \frac{-x}{2} + 3 \rightarrow$ Eğim $= \frac{-1}{2}$

doğrusuna dik olduğuna göre, m kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x + m \Rightarrow f'(3) = 6 + m$

$(m+6)\cdot\frac{-1}{2} = -1 \Rightarrow m + 6 = 2$

$m = -4$

3. –1	4. $\frac{9}{2}$	5. –9	6. –4

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 7.

$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$

fonksiyonunun grafiği üzerindeki x = 2 apsisli noktasından çizilen teğetinin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

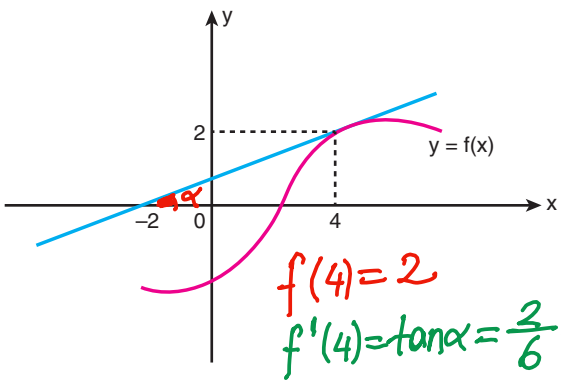
$f'(x) = 4x - 3 \Rightarrow f'(2) = 5$

$f(2) = 8 - 6 + 4 = 6$

$(2, 6),\ m_T = 5$

$y - 6 = 5 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 5x - 4$

ÖRNEK 8.



$f(4) = 2$

$f'(4) = \tan\alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Şekildeki y = f(x) eğrisi d doğrusuna x = 4 apsisli noktada teğettir.

$g(x) = f^2(x) + x$

olduğuna göre, g'(4) kaçtır?

ÇÖZÜM

$g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) + 1$

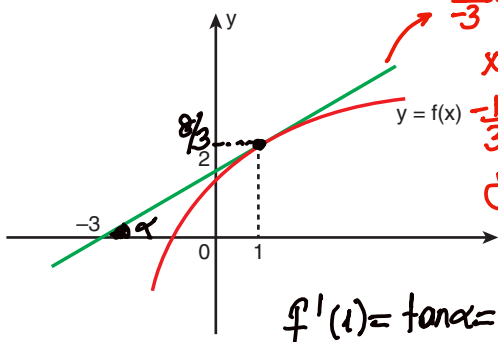
$g'(4) = 2\underbrace{f(4)}_{2} \cdot \underbrace{f'(4)}_{\frac{1}{3}} + 1$

$= \frac{4}{3} + 1$

$= \frac{7}{3}$

ÖRNEK 9.

Aşağıda, f fonksiyonunun ve bu fonksiyona x = 1 apsisli noktasından çizilen teğetin grafiği verilmiştir.



$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$

$x = 1$ için

$-\frac{1}{3} + \frac{y}{2} = 1$

$y = \frac{8}{3}$

$f'(1) = \tan\alpha = \frac{8/3}{4}$

$f'(1) = \frac{2}{3}$

$g(x) = x^2 \cdot f(2 - x)$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, g'(1) kaçtır?

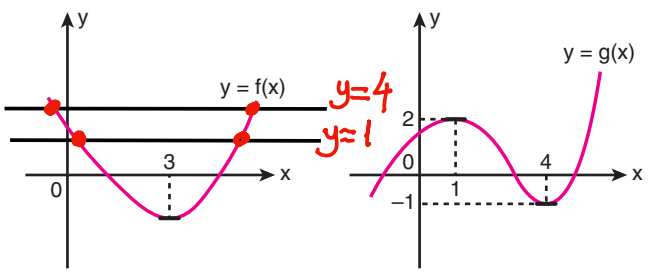
ÇÖZÜM

$g'(x) = 2x \cdot f(2-x) + x^2 \cdot (-1) \cdot f'(2-x)$

$g'(1) = 2 \cdot \underbrace{f(1)}_{8/3} - \underbrace{f'(1)}_{2/3} \Rightarrow g'(1) = \frac{14}{3}$

ÖRNEK 10.

Aşağıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre, (g ∘ f)'(x) = 0 denkleminin kaç farklı reel kökü vardır?

ÇÖZÜM

$f'(x) \cdot g'(f(x)) = 0$

$f'(x) = 0 \ \vee \ g'(f(x)) = 0$

$x = 3$ (1 kök)

$f(x) = 1$ (2 kök) $\vee$ $f(x) = 4$ (2 kök)

5 kök vardır.

7. $y = 5x - 4$	8. $\frac{7}{3}$	9. $\frac{14}{3}$	10. 5

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 11.

y = f(x) fonksiyonuna üzerindeki A(2, b) noktasından çizilen teğetin denklemi y = 3x + 1 dir.

$m_T = f'(2) = 3$

$g(x) = x^2 \cdot f(x)$

olduğuna göre, g(x) fonksiyonuna x = 2 apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(2) = 3.2 + 1 = 7 \Rightarrow A(2, 7)$

$g'(x) = 2x.f(x) + x^2.f'(x)$

$g'(2) = 4.\underbrace{f(2)}_{7} + 4.\underbrace{f'(2)}_{3}$

$g'(2) = 40$

ÖRNEK 12.

$f(x) = x^3 - bx^2 + ax + 4$

fonksiyonunun grafiğine üzerindeki A(1, 3) noktasından çizilen teğeti x eksenine paralel olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(1) = 1 - b + a + 4 = 3 \Rightarrow b - a = 2$

$f'(x) = 3x^2 - 2bx + a$

$f'(1) = 3 - 2b + a = 0 \Rightarrow 2b - a = 3$

$b = 1, a = -1$

$a + b = 0$

ÖRNEK 13.

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + x - 7$

eğrisinin x eksenine paralel olan teğetlerinin değme noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - 10x + 1$

$f'(x) = x^2 - 10x + 1 = 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = 10$

ÖRNEK 14.

$f(x) = x^2 + 2x + 9$

fonksiyonunun grafiğinin, y = x + 3 doğrusuna en yakın noktasının apsisi kaçtır?

$m_{Eğim} = 1$

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x + 2$

En yakın noktanın apsisi a olsun.

$2.a + 2 = 1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$

ÖRNEK 15.

$f(x) = x^2 + x + 3$

fonksiyonunun grafiği üzerindeki noktaların birinden çizilen teğet doğrusu orijinden geçmektedir.

Buna göre, teğet noktasının apsisinin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM

$A(a, a^2 + a + 3)$

$f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(a) = 2a + 1$

$y - (a^2 + a + 3) = (2a + 1).(x - a)$

$(0,0)$ dan geçiyor: $-a^2 - a - 3 = -2a^2 - a$

$a^2 - 3 = 0 \Rightarrow a_1 . a_2 = -3$

ÖRNEK 16.

$f(x) = x^2 + 2x + 7$

fonksiyonunun grafiğine A(1, 1) noktasından teğetler çiziliyor.

Buna göre, çizilen bu teğetlerin eğimleri toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$A(a, a^2 + 2a + 7)$ $f'(x) = 2x + 2$

$f'(x) = 2a + 2$

$y - (a^2 + 2a + 7) = (2a + 2).(x - a)$

A(1, 1) için $-a^2 - 2a - 6 = -2a^2 + 2a + 2 - 2a$

$a^2 - 2a - 8 = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = 2$

$f'(a_1) = 2a_1 + 2$
$f'(a_2) = 2a_2 + 2$
$2\underbrace{(a_1 + a_2)}_{2} + 4 = 8$

11. 40	12. 0	13. 10	14. $\frac{-1}{2}$	15. –3	16. 8

AÇILMATEMATİK

1. $f(x) = (a+2)x^2 - 5x + a - 3$

fonksiyonuna x = 3 apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun x ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açı 45° dir.

Buna göre, a kaçtır?

A) –3 B) $\frac{-3}{2}$ C) –1 D) $\frac{-1}{2}$ E) 1

$f'(x) = 2.(a+2)x - 5$

$f'(3) = 6a + 7 = \underbrace{\tan 45^\circ}_{1}$

$6a + 7 = 1$

$a = -1$

2. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

fonksiyonunun grafiğine hangi apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi $\frac{1}{3}$'tür?

A) $\frac{2}{3}$ B) 1 C) $\frac{7}{2}$ D) 5 E) 13

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}$

$f'(a) = \frac{1}{\sqrt{2a-1}} = \frac{1}{3}$

$2a - 1 = 9 \Rightarrow 2a = 10$

$a = 5$

3. $f(x) = x^3 - ax^2 + 1$

fonksiyonunun grafiğine x = –1 apsisli noktasından çizilen teğet doğrusu y = 3x – 1 doğrusuna diktir.

$m = 3$

Buna göre, a kaçtır?

A) –2 B) $\frac{-5}{3}$ C) $\frac{-4}{3}$ D) –1 E) $\frac{-1}{2}$

$f'(x) = 3x^2 - 2ax$

$f'(-1) = 3 + 2a$

$(3+2a).3 = -1 \Rightarrow 2a = -\frac{10}{3}$

$a = -\frac{5}{3}$

4. $f(x) = x^2 - 6\sqrt{x} - 5$

fonksiyonunun grafiğine x = 1 apsisli noktasından çizilen teğetin denklemi y = ax + b olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) –16 B) –12 C) –10 D) –8 E) –4

$f(1) = 1 - 6 - 5 = -10$

$(1, -10) \Rightarrow a + b = -10$

5. $f(x) = x^3 - 5x + 2$

fonksiyonu veriliyor.

$f(2) = 8 - 10 + 2 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 5$

$f'(2) = 7$

Buna göre, y = (f ∘ f)(x) fonksiyonunun grafiğine x = 2 apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun eğimi kaçtır?

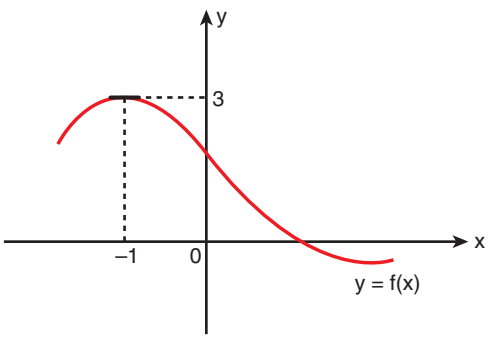
A) –18 B) –20 C) –28 D) –32 E) –35

$y' = f'(x).f'(f(x))$

$y'(2) = \underbrace{f'(2)}_{7}.\underbrace{f'(f(2))}_{-5}$ ($f(2) = 0$)

$y'(2) = -35$

6.



Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$g(x) = x \cdot f(3 - 2x)$

olduğuna göre, g'(2) kaçtır?

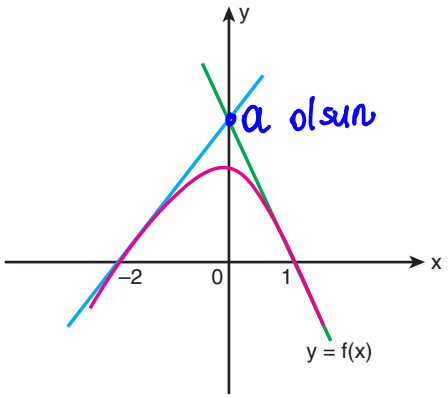
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$g'(x) = 1.f(3-2x) - 2x.f'(3-2x)$

$g'(2) = \underbrace{f(-1)}_{3} - 4.\underbrace{f'(-1)}_{0} \Rightarrow g'(2) = 3$

AÇIL MATEMATİK

7.



Yukarıda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonunun x = –2 ve x = 1 noktasındaki teğetleri y ekseni üzerinde kesişmştir.

$f'(-2) - f'(1) = 12$

olduğuna göre, teğet doğrularının kesiştiği noktanın ordinatı kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 9

$f'(-2) - f'(1) = 12$

$\underbrace{\frac{a}{2}} \quad \underbrace{-\frac{a}{1}}$

$\frac{a}{2} + a = 12 \Rightarrow \frac{3a}{2} = 12$

$a = 8$

8. $f(x) = ax^3 + bx + 5$

fonksiyonunun grafiği x = –1 apsisli noktasında x eksenine teğettir.

Buna göre, a – b farkı kaçtır?

A) –2 B) –4 C) –6 D) –8 E) –10

$f(-1) = 0 \Rightarrow -a - b + 5 = 0$

$a + b = 5$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$

$-1 \quad a + b = 5$

$3a + b = 0$

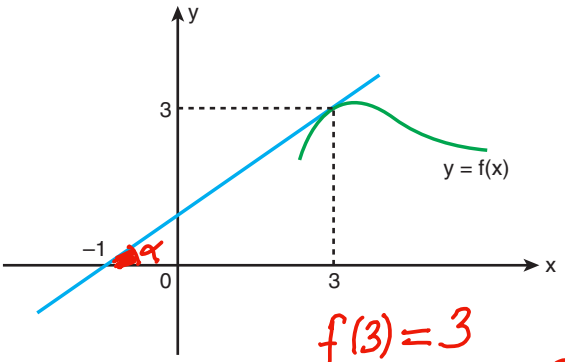
$2a = -5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

$b = \frac{15}{2}$

$a - b = -\frac{5}{2} - \frac{15}{2}$

$a - b = -10$

9. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği ve bu grafiğe x = 3 apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun grafiği verilmiştir.



$f(3) = 3$

$f'(3) = \tan\alpha = \frac{3}{4}$

$h(x) = \frac{f^2(x)}{x+1}$

olduğuna göre, h'(3) kaçtır?

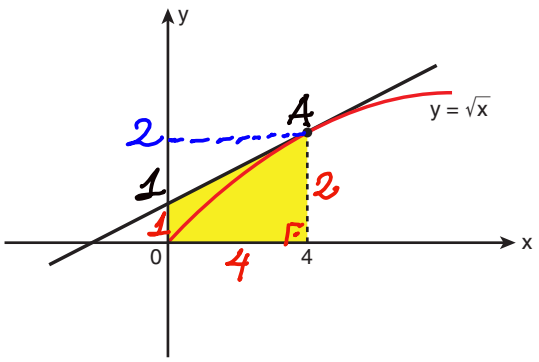
A) $\frac{9}{16}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

$h'(x) = \frac{2f(x).f'(x).(x+1) - f^2(x).1}{(x+1)^2}$

$h'(3) = \frac{8.f(3).f'(3) - f^2(3)}{16}$

$h'(3) = \frac{1}{16}.\left(8.3.\frac{3}{4} - 9\right) \Rightarrow h'(3) = \frac{9}{16}$

10. Aşağıda, $y = \sqrt{x}$ eğrisinin grafiği ve bu grafiğe x = 4 apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow m_T = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

$A(4,2) \rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}.(x-4)$

$x = 0$ için $y - 2 = -1 \Rightarrow y = 1$

Yamuğun Alanı $= \frac{1+2}{2}.4 = 6$

ACİL MATEMATİK

11. $f(x) = x^4 - 2x + 3$ → Eğim = 2

fonksiyonunun y = 2x – 5 doğrusuna en yakın olan noktasının ordinatı kaçtır?

A) –1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

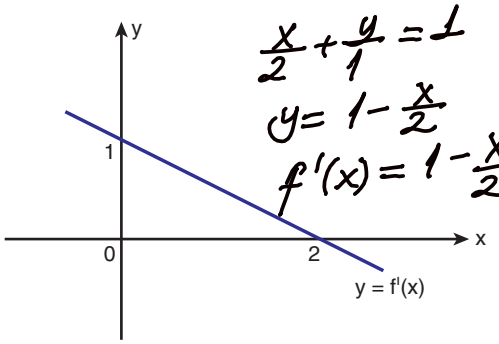
$f'(x) = 4x^3 - 2$

En yakın noktanın apsisi a olsun.

$f'(a) = 4a^3 - 2 = 2$

$4a^3 = 4 \Rightarrow a = 1$

12. Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



$\frac{x}{2} + \frac{y}{1} = 1$

$y = 1 - \frac{x}{2}$

$f'(x) = 1 - \frac{x}{2}$

$g(x) = f(2x - 1) + x^2$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, y = g(x) fonksiyonunun grafiğine x = 2 apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

$g'(x) = 2 \cdot f'(2x-1) + 2x$

$g'(2) = 2 \cdot f'(3) + 4 \Rightarrow g'(2) = -1 + 4$

$f'(3) = 1 - \frac{3}{2}$

$g'(2) = 3$

13. $y = u^2 - u + 2$

$u = x^3 - x$

fonksiyonları veriliyor.

y = f(x) fonksiyonunun grafiğine x = 1 apsisli noktasından çizilen teğetin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) y = x + 3 B) y = –2x + 2 C) y = x – 2 D) y = –2x + 4 E) y = –2x + 3

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2u - 1)(3x^2 - 1)$

$x = 1 \Rightarrow u = 0$

$\frac{dy}{dx} = -1 \cdot 2 = -2$

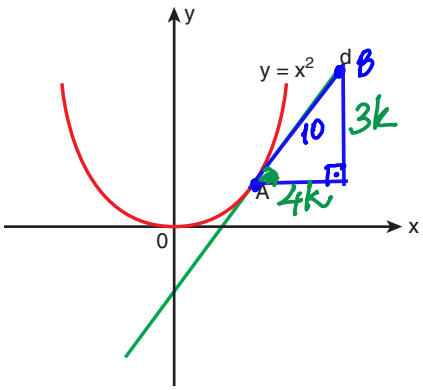
$A(1, 1^2 - 1 + 2)$

$A(1, 2)$

$y - 2 = -2(x - 1)$

$y = -2x + 4$

14.



Şekilde verilen d doğrusu $y = x^2$ parabolüne apsisi $\frac{3}{8}$ olan A noktasında teğettir. d doğrusunun üzerinde A noktasından 10 birim uzaklıkta bir B noktası alınıyor.

|AB| = 10 birim

olduğuna göre, B ile A'nın apsisleri farkının mutlak değeri kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

$y' = 2x \Rightarrow y' = 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

$m_T = \frac{3}{4}$

$5k = 10 \Rightarrow k = 2$

Apsisler farkı = $4k = 8$

15. $f(x) = x^2 + ax + 5$ x_1 ve x_2 de x eksenini kessin

fonksiyonunun grafiğine, fonksiyonun x eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetler birbirine diktir.

Buna göre, a sayısının pozitif değeri kaçtır?

A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{11}$ C) $\sqrt{17}$ D) $\sqrt{21}$ E) $\sqrt{29}$

$f'(x) = 2x + a$

$(2x_1 + a) \cdot (2x_2 + a) = -1$

$4x_1 \cdot x_2 + 2a(x_1 + x_2) + a^2 = -1$

$x_1 \cdot x_2 = 5$, $x_1 + x_2 = -a$

$20 - a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 21 \Rightarrow a = \sqrt{21}$

1. C	2. D	3. B	4. C	5. E	6. C	7. D	8. E
9. A	10. C	11. D	12. E	13. D	14. D	15. D	

ACİL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

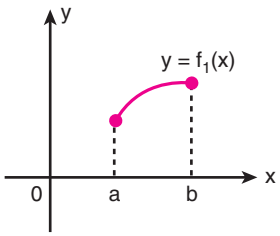
Artan ve Azalan Fonksiyonlar

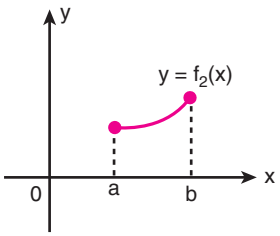
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

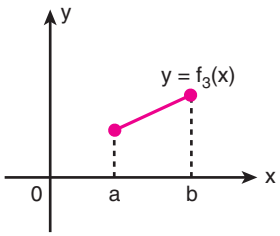
her x_1 ve $x_2 \in (a, b)$ için

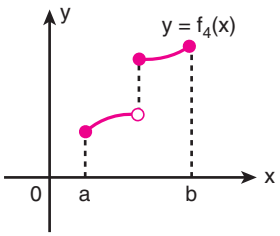
1. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ ise f, [a, b] aralığında artan bir fonksiyondur.
2. $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ ise f, [a, b] aralığında azalan bir fonksiyondur.

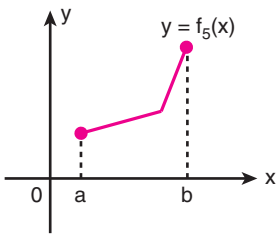
Aşağıda grafiği verilen fonksiyonların tamamı [a, b] aralığında artan fonksiyondur.

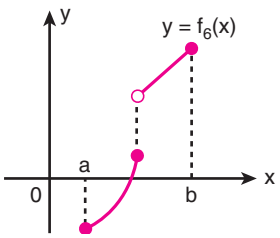




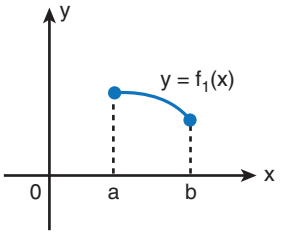


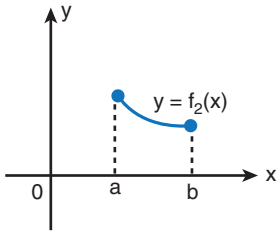


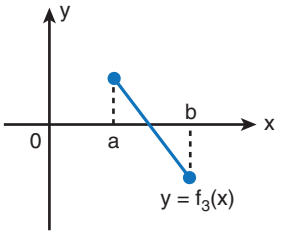


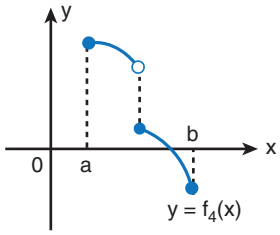


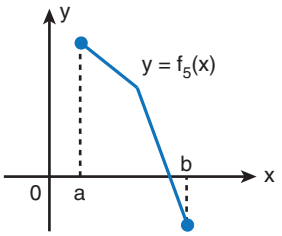
Aşağıda grafiği verilen fonksiyonların tamamı [a, b] aralığında azalan fonksiyondur.

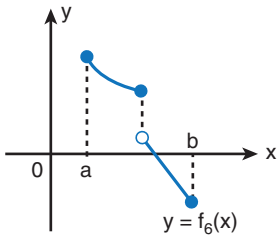




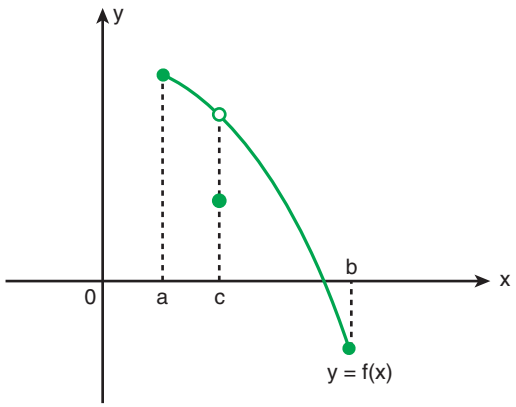








UYARI

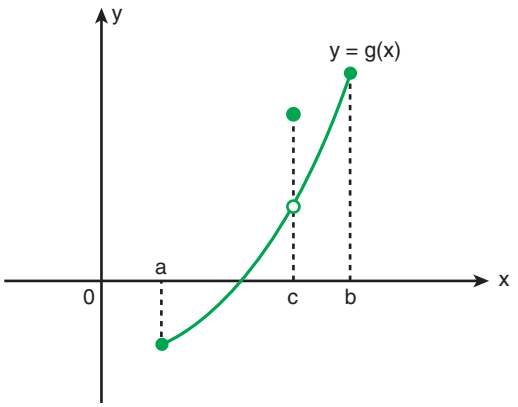


Yukarıda verilen f fonksiyonu için [a, b] aralığında "azalandır" diyemeyiz.

Fonksiyon [a, c] aralığında ve (c, b) aralığında ayrı ayrı azalandır diyebiliriz.

AÇIL MATEMATİK

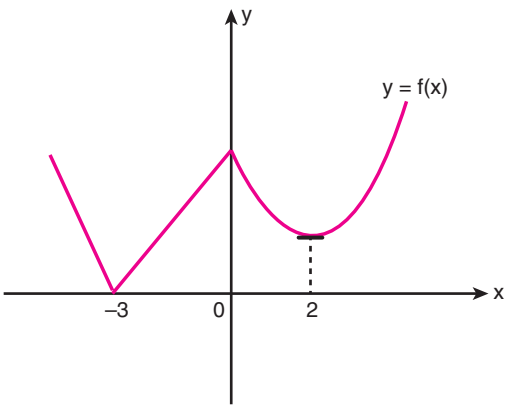
UYARI



Aynı mantıkla hareket edersek g fonksiyonu [a, b] aralığında artandır diyemeyiz.

g fonksiyonu [a, c] ve (c, b] aralıklarında ayrı ayrı artandır diyebiliriz.

Örnek:



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu;

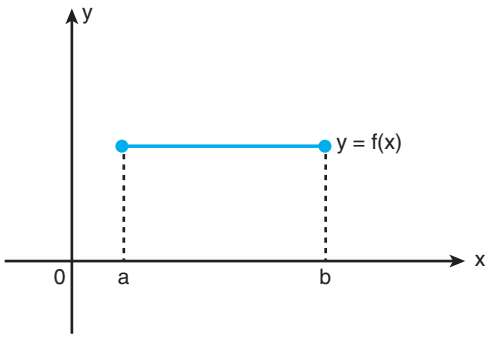
$(-\infty, -3]$ aralığında azalan,

$[-3, 0]$ aralığında artan,

$[0, 2]$ aralığında azalan,

$[2, \infty)$ aralığında artandır.

YANINDA BULUNSUN



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ve [a, b] aralığında sürekli olmak üzere,

$\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu [a, b] aralığında sabit fonksiyondur.

f fonksiyonunun (a, b) aralığındaki her noktada türevi sıfırdır.

YANINDA BULUNSUN

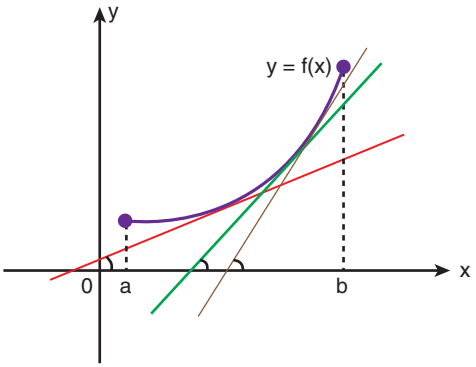
Artan ve Azalan Fonksiyonların Türevle İlişkisi

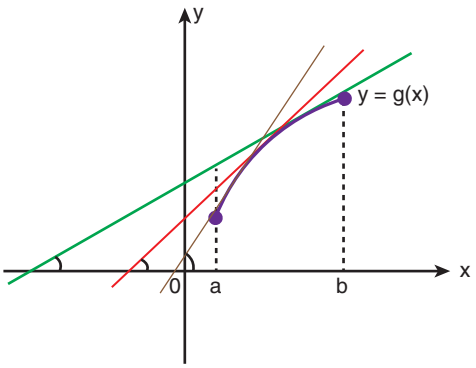
f, [a, b] aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

1. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ ise f, [a, b] aralığında artan bir fonksiyondur.
2. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise f, [a, b] aralığında azalan bir fonksiyondur.
3. Her $x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ ise f, [a, b] aralığında sabit bir fonksiyondur.

AÇIL MATEMATİK

[a, b] aralığında artan ve (a, b) aralığında türevlenebilen f fonksiyonu ile [a, b] aralığında artan ve (a, b) aralığında türevlenebilen g fonksiyonuna (a, b) aralığında çizilen teğetleri incelenirse,





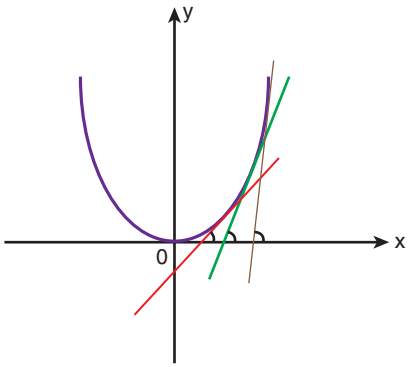
f ve g fonksiyonlarının (a, b) aralığında çizilen teğetleri x ekseni ile pozitif yönde dar açı yapmaktadır.

Yani, f ve g fonksiyonlarının (a, b) aralığındaki her noktada türevleri pozitiftir.

Sonuç olarak; [a, b] aralığında tanımlı bir f fonksiyonu ve her $x \in (a, b)$ için, $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu [a, b] aralığında artandır denir.

Örneğin;

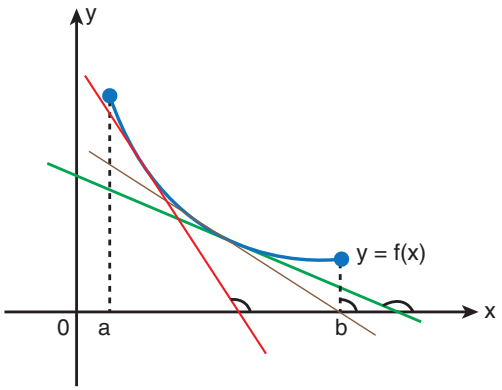
$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğine baktığımızda,

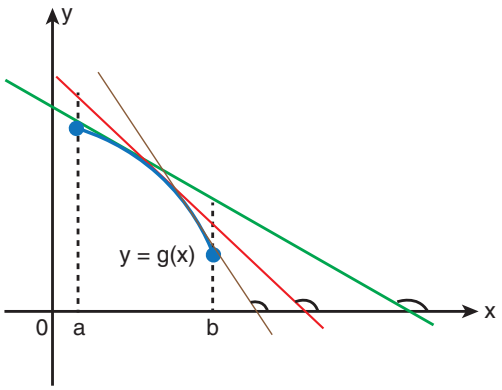


Fonksiyona $(0, \infty)$ aralığında çizilen teğet doğruları x ekseni ile pozitif yönlü dar açılar yapmaktadır.

Fonksiyon, $[0, \infty)$ aralığında artandır.

[a, b] aralığında azalan ve (a, b) aralığında türevlenebilen f fonksiyonu ile [a, b] aralığında azalan ve (a, b) aralığında türevlenebilen g fonksiyonuna (a, b) aralığında çizilen teğetleri incelersek;





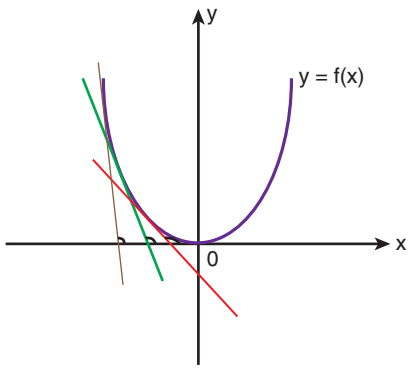
f ve g fonksiyonlarının (a, b) aralığında çizilen teğetleri x ekseni ile pozitif yönde geniş açı yapmaktadır.

Yani, f ve g fonksiyonlarının (a, b) aralığındaki her noktada türevleri negatiftir.

Sonuç olarak; [a, b] aralığında tanımlı bir f fonksiyonu ve her $x \in (a, b)$ için, $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu [a, b] aralığında azalandır denir.

Örneğin;

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğine baktığımızda,



Fonksiyona, $(-\infty, 0)$ aralığında çizilen teğet doğruları x ekseni ile pozitif yönlü geniş açılar yapmaktadır.

Fonksiyon, $(-\infty, 0]$ aralığında azalandır.

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 1.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 2x + 5$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	
		↘		↗	

$(-\infty, 1]$ azalan, $[1, \infty)$ artan

ÖRNEK 2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 3$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -2$

x		-2		4	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
	↗		↘		↗

$(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$ artan, $[-2, 4]$ azalan

ÖRNEK 3.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = -2x + 1$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = -2$

x	$-\infty$				$+\infty$
$f'(x)$	−	−	−	−	−

f fonksiyonu daima azalandır.

ÖRNEK 4.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 - 1$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0^*$

x		0^*	
$f'(x)$	+	0	+

f fonksiyonu daima artandır.

ÖRNEK 5.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 4x^3 - 3x^4$

fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 12x^2 - 12x^3 = 0 \Rightarrow x = 0^* \vee x = 1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	+		0	+	0	−	
	↗			↗		↘	

$(-\infty, 1]$ artan
$[1, \infty)$ azalan

ÖRNEK 6.

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = (x^2 - 2x)^2$

fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralığı bulunuz

ÇÖZÜM

$f'(x) = (2x - 2) \cdot 2 \cdot (x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 0, x = 2$

x		0		1		2	
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
	↘		↗		↘		↗

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ olduğundan $[1, 2]$ aralığında azalandır.

1. $(-\infty, 1]$ aralığında azalan, $[1, \infty)$ aralığında artan.	
2. $(-\infty, -2]$ aralığında artan, $[-2, 4]$ aralığında azalan, $[4, \infty)$ aralığında artandır.	
3. $(-\infty, \infty)$ aralığında azalandır. Bir başka ifadeyle; f fonksiyonu daima azalandır.	
4. f fonksiyonu daima artandır.	
5. $(-\infty, 1]$ aralığında artan, $[1, \infty)$ aralığında azalandır.	6. $[1, 2]$

AÇIL MATEMATİK

NOT

f üçüncü dereceden bir polinom fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun türev fonksiyonu;

$f'(x) = ax^2 + bx + c$

olsun.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde,

- $a > 0$ ve $\Delta \leq 0$ ise f fonksiyonu daima artandır.
- $a < 0$ ve $\Delta \leq 0$ ise f fonksiyonu daima azalandır.

ÖRNEK 7.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 + ax^2 + 27x - 5$

fonksiyonu daima artan olduğuna göre, a hangi aralıktadır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 27$

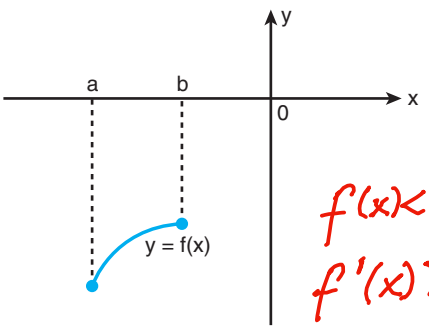
$\Delta \leq 0$

$4a^2 - 4.3.27 \leq 0 \Rightarrow a^2 - 81 \leq 0$

$-9 \leq a \leq 9 \rightarrow [-9, 9]$

ÖRNEK 8.

Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun [a, b] aralığındaki grafiği verilmiştir.



$f(x) < 0$

$f'(x) > 0$

Buna göre,

I. $y = f^2(x)$

II. $y = (f \circ f)(x)$

III. $y = \frac{1}{f(x)}$

öncüllerinde verilen fonksiyonlardan hangileri aynı aralıkta azalandır?

ÇÖZÜM

I. $y' = 2f(x).f'(x) < 0$ Azalan

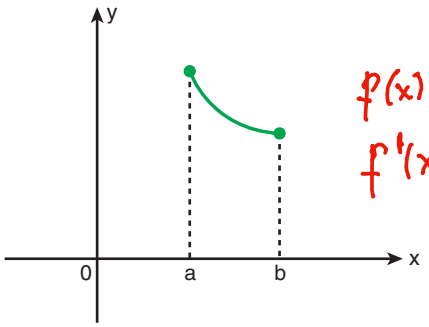
II. $y' = f'(x).f'(f(x)) > 0$ Artan

III. $y' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} < 0$ Azalan

I ve III

ÖRNEK 9.

Aşağıda f fonksiyonunun [a, b] aralığındaki grafiği verilmiştir.



$f(x) > 0$

$f'(x) < 0$

Buna göre,

I. $y = f^3(x)$

II. $y = \sqrt{f(x)}$

III. $y = -f(x)$

öncüllerinde verilen fonksiyonlardan hangileri aynı aralıkta artandır?

ÇÖZÜM

I. $y' = 3f^2(x).f'(x) < 0$ Azalan

II. $y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} < 0$ Azalan

III. $y = -f'(x) > 0$ Artan

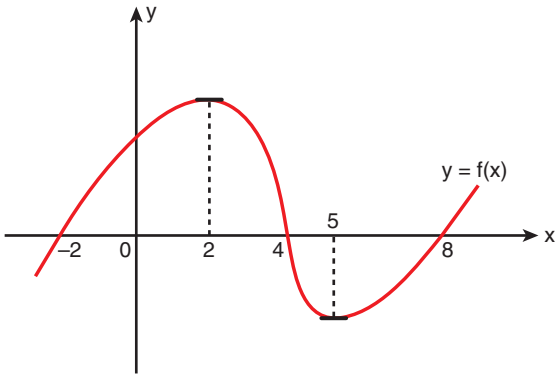
Yalnız III

7. [–9, 9]	8. I ve III	9. Yalnız III

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 10.

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

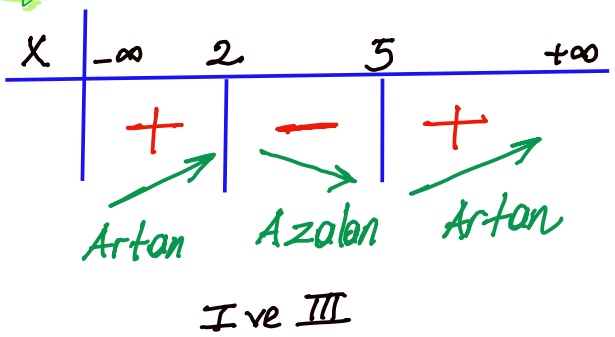
I. f fonksiyonu [2, 5] aralığında azalandır. ✓

II. $f'(6) < 0$ —

III. $f'(3) < 0$ ✓

ifadelerinden hangileri doğrudur?

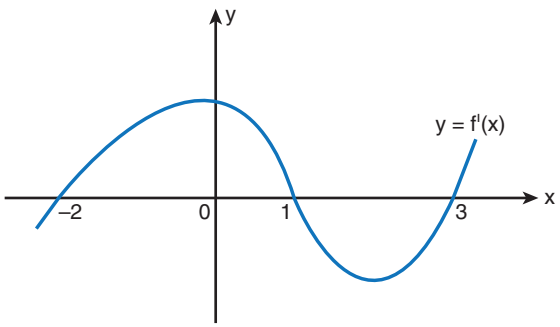
ÇÖZÜM



I ve III

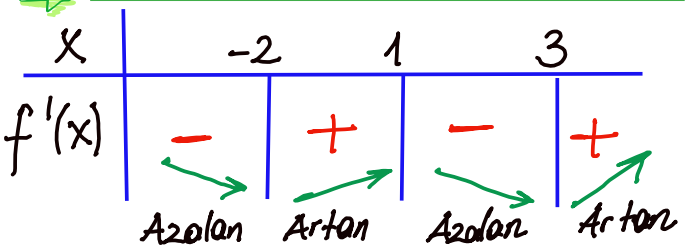
ÖRNEK 11.

Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM

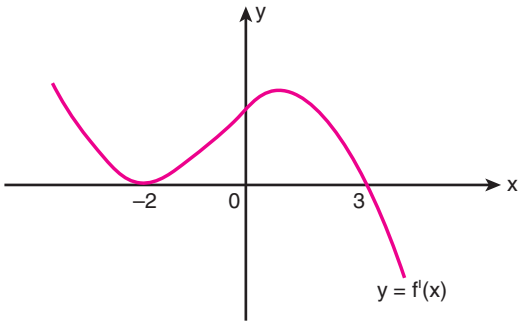


$(-\infty, -2] \cup [1, 3]$ Azalan

$[-2, 1] \cup [3, \infty)$ Artan

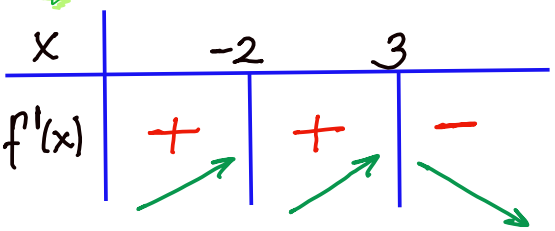
ÖRNEK 12.

Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

ÇÖZÜM



$(-\infty, 3]$ Artan

$[3, \infty)$ Azalan

10. I ve III
11. $(-\infty, -2]$ aralığında azalan, $[-2, 1]$ aralığında artan, $[1, 3]$ aralığında azalan, $[3, \infty)$ aralığında artandır.
12. $(-\infty, 3]$ aralığında artan, $[3, \infty)$ aralığında azalandır.

AÇIL MATEMATİK

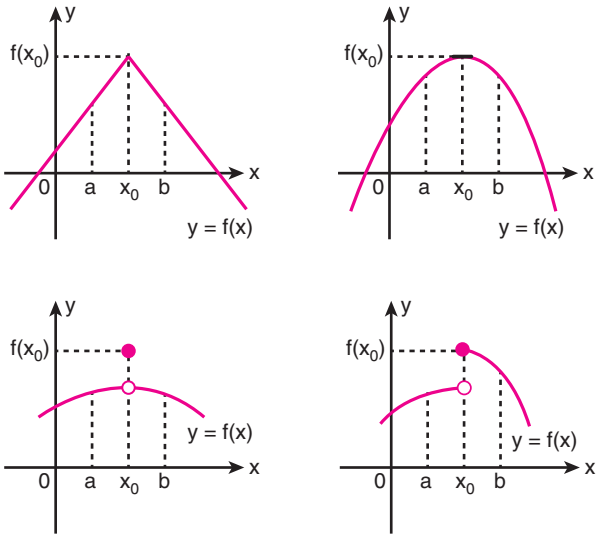
YANINDA BULUNSUN

Bir Fonksiyonun Yerel Maksimum Noktası

$f : A \to \mathbb{R}$ ve $(a, b) \subseteq A$ olmak üzere,

bir $x_0 \in (a, b)$ için $f(x_0)$, fonksiyonun bu aralıktaki en büyük değeri oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktası f fonksiyonunun bir yerel maksimum noktasıdır denir.

Aşağıda gösterilen 4 fonksiyon için $(x_0, f(x_0))$ noktaları yerel maksimum noktalarıdır.



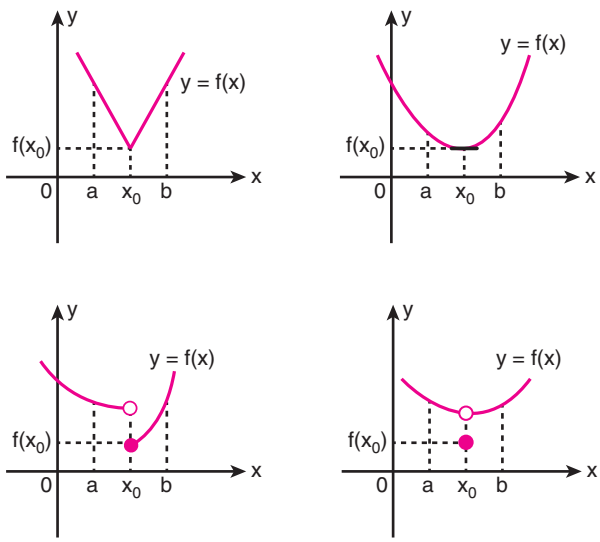
YANINDA BULUNSUN

Bir Fonksiyonun Yerel Minimum Noktası

$f : A \to \mathbb{R}$ ve $(a, b) \subseteq A$ olmak üzere,

bir $x_0 \in (a, b)$ için $f(x_0)$, fonksiyonun bu aralıktaki en küçük değeri oluyorsa $(x_0, f(x_0))$ noktası f fonksiyonunun bir yerel minimum noktasıdır denir.

Aşağıda gösterilen 4 fonksiyon için $(x_0, f(x_0))$ noktaları yerel minimum noktalarıdır.



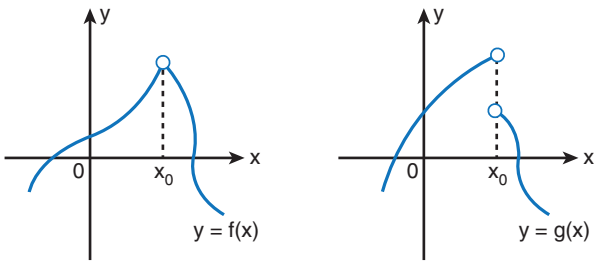
YANINDA BULUNSUN

f, [a, b] aralığında tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, f(a) ve f(b) değerleri f için yerel maksimum ya da yerel minimum noktalardır.

NOT

Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına, genel olarak **"Ekstremum Noktalar"** denir.

UYARI : Bir fonksiyonun tanımlı olmadığı noktalarda fonksiyonun ekstremum noktası yoktur.



Yukarıda grafiği verilen f ve g fonksiyonlarının x_0 apsisli noktalarında ekstremumları yoktur.

YANINDA BULUNSUN

Mutlak Minimum ve Mutlak Maksimum Noktaları

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonunun görüntü kümesindeki en büyük sayıya f(x) fonksiyonunun mutlak maksimumu, en küçük sayıya f(x) fonksiyonunun mutlak minimumu denir.

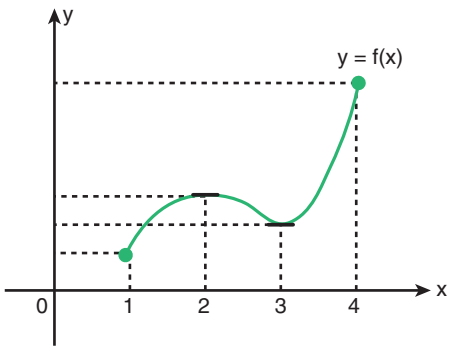
f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli bir fonksiyon ise f(x) fonksiyonunun mutlak minimum ve mutlak maksimum değerleri daima vardır. Bu değerler f(x) fonksiyonunun ya f(a), f(b) değerleridir ya da yerel ekstremum değerleridir.

f(a), f(b) ve yerel ekstremum değerlerinden en büyük olanına **"Mutlak Maksimum"**, en küçük olanına **"Mutlak Minimum"** denir.

f(x) fonksiyonu sürekli olmadığında ya da verilen tanım kümesi (a, b) açık aralık olduğunda mutlak minimum ve mutlak maksimum değerlerinin varlığı kesin değildir.

AÇIL MATEMATİK

Örneğin;

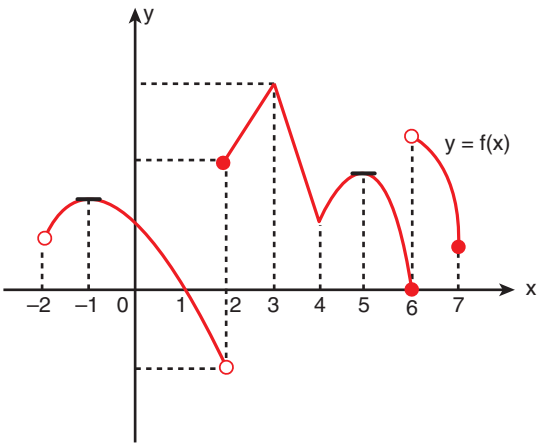


Yukarıda [1, 4] aralığında tanımlı olan f fonksiyonu için,

- (1, f(1)) fonksiyonun yerel minimum noktasıdır.
- (4, f(4)) fonksiyonun yerel maksimum noktasıdır.
- (2, f(2)) fonksiyon için yerel maksimum noktadır.
- (3, f(3)) fonksiyon için yerel minimum noktadır.
  - (1, f(1)) noktası f fonksiyonunun aynı zamanda mutlak minimum noktasıdır.
  - (4, f(4)) noktası f fonksiyonunun aynı zamanda mutlak maksimum noktasıdır.

Örneğin;

Aşağıda, (–2, 7] aralığında tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Verilen fonksiyonda,

- (–1, f(–1)), (3, f(3)) ve (5, f(5)) noktaları fonksiyonun yerel maksimum noktalarıdır.
- (4, f(4)), (6, f(6)) ve (7, f(7)) noktaları fonksiyonun yerel minimum noktalarıdır.
- (3, f(3)) noktası, fonksiyonun aynı zamanda mutlak maksimum noktasıdır.
- Fonksiyonun mutlak minimum noktası yoktur.

ÖRNEK 1.

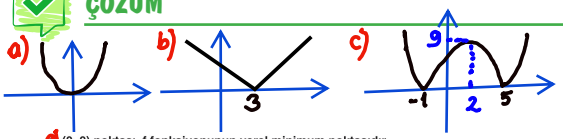
Aşağıda verilen fonksiyonların ekstremum noktalarını bulunuz.

a) $f(x) = x^2$

b) $g(x) = |x - 3|$

c) $h(x) = |x^2 - 4x - 5|$

ÇÖZÜM



a) (0, 0) noktası, f fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.
b) (3, 0) noktası, g fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.
c) (–1, 0) ve (5, 0) noktaları h fonksiyonunun yerel minimum noktaları, (2, 9) noktası h fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır.

YANINDA BULUNSUN

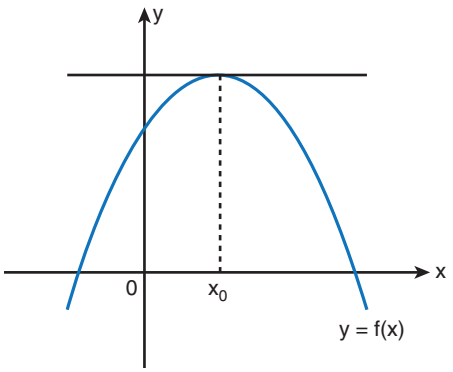
Ekstremum noktalarının birinci türevle ilişkisi:

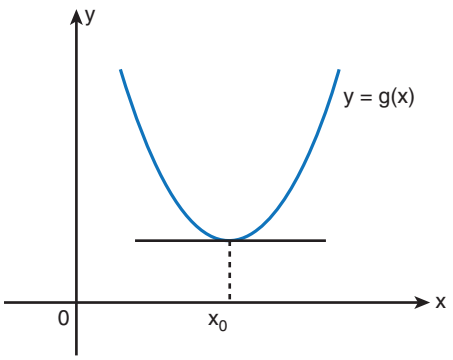
f:[a, b] → ℝ, y = f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli olsun.

Fonksiyonun c ∈ (a, b) apsisli noktası ekstremum noktası ise $f'(c) = 0$ dır.

Fonksiyonun türevinin sıfıra eşit olduğu noktada türev fonksiyonu işaret değiştiriyorsa bu nokta fonksiyonun ekstremum noktasıdır.

Türev fonksiyonu işaret değiştirmiyorsa bu nokta fonksiyonun ekstremum noktası değildir.





1. a) (0, 0) noktası, f fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.
   b) (3, 0) noktası, g fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.
   c) (–1, 0) ve (5, 0) noktaları h fonksiyonunun yerel minimum noktaları, (2, 9) noktası h fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır.

AÇIL MATEMATİK

Türevlenebilir bir fonksiyonun ekstremum noktalarında çizilen teğetleri x eksenine paralel olacağından bu teğetlerin eğimleri sıfırdır. Bu nedenle türevlenebilir bir fonksiyonun, ekstremum noktalarında türevi sıfırdır.

Yukarıda verilen f ve g fonksiyonlarının x_0 apsisli noktalarında bir ekstremum noktası vardır.

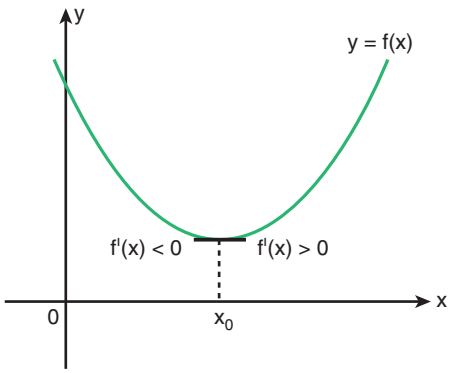
$f'(x_0) = g'(x_0) = 0$ dır.

UYARI

Bir fonksiyonun türevinin sıfır olduğu noktanın ekstremum noktası olabilmesi için fonksiyonun türevinin o noktada işaret değiştirmesi gerekir.

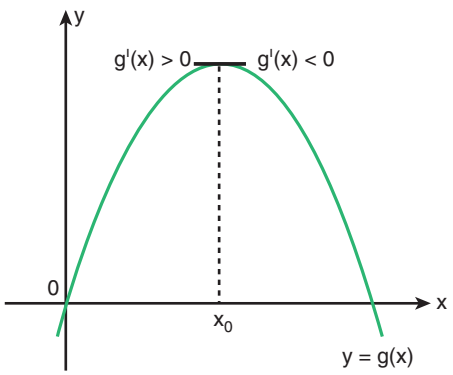
Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyon, x_0 ın solunda azalandır. Dolayısıyla fonksiyonun türevi x_0 ın solunda negatiftir. Fonksiyon, x_0 ın sağında artandır. Dolayısıyla fonksiyonun türevi x_0 ın sağında pozitiftir.

Bir fonksiyonun azalanlıktan artanlığa geçtiği noktaya **"Yerel Minimum Noktası"** denir.



Aşağıda g fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Fonksiyon, x_0 ın solunda artandır. Dolayısıyla fonksiyonunun türevi x_0 ın solunda pozitiftir. Fonksiyon, x_0 ın sağında azalandır. Dolayısıyla fonksiyonun türevi, x_0 ın sağında negatiftir.

Bir fonksiyonun artanlıktan azalanlığa geçtiği noktaya **"Yerel Maksimum Noktası"** denir.



ÖRNEK 2.

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 + 2x - 7$

fonksiyonunun ekstremum noktasını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

x		−1	
f'(x)	−	0	+
	↘		↗

$f(-1) = 1 - 2 - 7 = -8$

$(-1, -8)$ yerel min.

ÖRNEK 3.

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 1$$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3, x = 3$

x		−3		3	
f'(x)	+	0	−	0	+
	↗	max.	↘	min.	↗

$f(-3) = 19$

$f(3) = -17$

$(-3, 19)$ max.

$(3, -17)$ min.

ÖRNEK 4.

f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 - 5$

fonksiyonunun ekstremum noktalarını inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0^*$

x		0	
f'(x)	+	0	+
	↗		↗

Daima artan ekstremum noktası yoktur.

2. $(-1, -8)$ noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.

3. $(-3, 19)$ noktası f fonksiyonunun yerel maksimum noktası, $(3, -17)$ noktası f fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır.

4. f fonksiyonunun ekstremum noktası yoktur.

AÇILMATEMATİK

ÖRNEK 5.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

fonksiyonunun yerel minimum değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ , } x = -3$

x		-3		1	
f'(x)	+	0	−	0	+
		max.		min.	

$f(1) = 1 + 3 - 9 - 10 = -15$

ÖRNEK 6.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 1$

fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisleri çarpımı kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 15x^4 - 60x^2 = 0$

$15x^2 \cdot (x^2 - 4) = 0$

x		-2		0		2	
f'(x)	+	0	−	0	−	0	+
		max.				min.	

$-2 \cdot 2 = -4$

ÖRNEK 7.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 - 3x + 2$

fonksiyonunun ekstremum noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$

$f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \quad A(1,0)$

$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4 \quad B(-1,4)$

$|AB| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

ÖRNEK 8.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^4 - 2x^2 + a - 4$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri 8 olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM

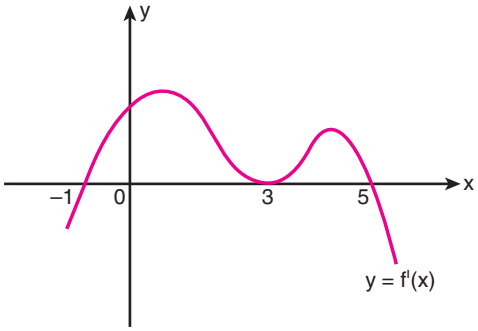
$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

x		-1		0		1	
f'(x)	−	0	+	0	−	0	+
		min.		max.		min.	

$f(0) = 0 - 0 + a - 4 = 8 \Rightarrow a = 12$

ÖRNEK 9.

Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

x		-1		3		5	
f'(x)	−	0	+	0	+	0	−
		min.				max.	

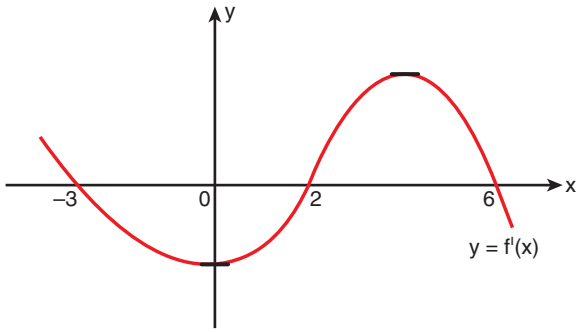
$(-1) + 5 = 4$

5. –15	6. –4	7. $2\sqrt{5}$	8. 12	9. 4

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 10.

Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun yerel maksimum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

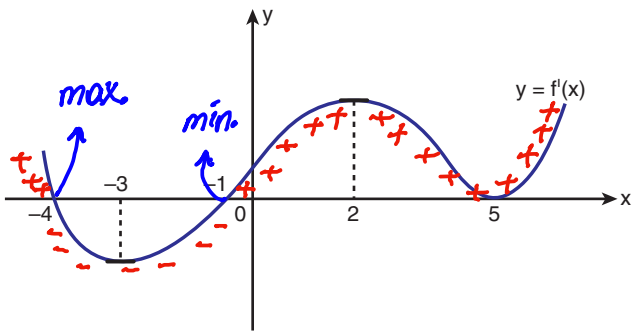
ÇÖZÜM

x		–3		2		6	
f'(x)	+	0	–	0	+	0	–
		max		min		max	

$(-3)+6=3$

ÖRNEK 11.

Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



f fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi a,

f' fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi b'dir.

Buna göre, b – a farkı kaçtır?

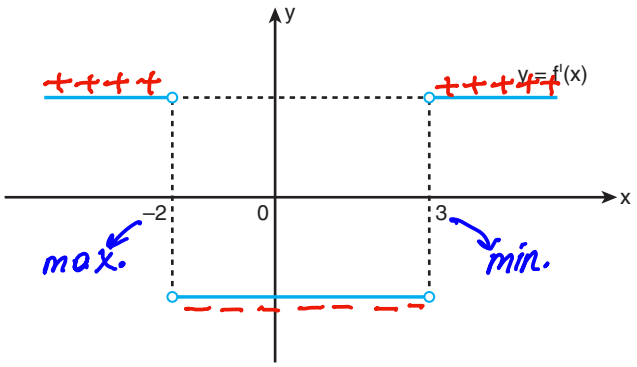
ÇÖZÜM

$a=-4$, $b=2$

$b-a=2-(-4)=6$

ÖRNEK 12.

Aşağıda gerçel sayılar kümesinde sürekli olan f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. f fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisler toplamı 1'dir. $(-2)+3=1$ ✓

II. f fonksiyonunun ekstremum noktası yoktur. –

III. f fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi –2'dir. ✓

ifadelerinden hangileri doğrudur?

ÇÖZÜM

I ve III

ÖRNEK 13.

$f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 4x + 8$

fonksiyonunun alabileceği maksimum değer kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x)=2x-4=0 \Rightarrow x=2$

$f(2)=4-8+8=4$

$f(-1)=1+4+8=13$

$f(4)=16-16+8=8$

maksimum değer 13 tür.

10. 3	11. 6	12. I ve III	13. 13

AÇIL MATEMATİK

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^4 + 4x$

fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(-\infty, 1]$ B) $(-\infty, -1]$ C) $[-1, \infty)$ D) $[1, \infty)$ E) $[-1, 1]$

$f'(x) = 4x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'		−	0	+	

$[-1, \infty) \to$ Artan

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 5x^3 - 3x^5$

fonksiyonunun yerel minimum değeri kaçtır?

A) -5 B) -4 C) -3 D) -2 E) -1

$f'(x) = 15x^2 - 15x^4 = 0$

$x^2(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
f'		−	0	+	0	+	0	−	

min. max.

$f(-1) = -5 + 3 = -2$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 \cdot (1 - x)^3$

fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) 1 E) $\frac{6}{5}$

$f'(x) = 2x \cdot (1-x)^3 + x^2 \cdot -1 \cdot 3(1-x)^2 = 0$

$x \cdot (1-x)^2 \cdot (2 - 2x - 3x) = 0$

$x \cdot (1-x)^2 \cdot (2 - 5x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = \frac{2}{5}$

x	$-\infty$		0		$2/5$		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	0	−	0	−	

min. max

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 - 9x^2 - a + 5$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri 2 olduğuna göre, a kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$f'(x) = 3x^2 - 18x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x - 6) = 0$

$x = 0, x = 6$

x	$-\infty$		0		6		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	

max. min.

$f(0) = 2 \Rightarrow 0 - 0 - a + 5 = 2$

$a = 3$

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 2x + b + 1$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarından biri, (–1, 5) olduğuna göre, a • b çarpımı kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

$f(-1) = 5 \Rightarrow -2 + a + 2 + b + 1 = 5$

$a + b = 4$

$f'(-1) = 0 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2ax - 2$

$f'(-1) = 6 - 2a - 2 = 0$

$a = 2$

$a = 2 \Rightarrow b = 2 \quad a \cdot b = 4$

6. $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

I. $f(x) = x^2 + 1 \to f'(x) = 2x$

II. $g(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x \to g'(x) = 4x^2 - 4x + 1$

III. $h(x) = x^5 - 1 \to h'(x) = 5x^4$

fonksiyonlarından hangileri gerçel sayılarda daima artandır?

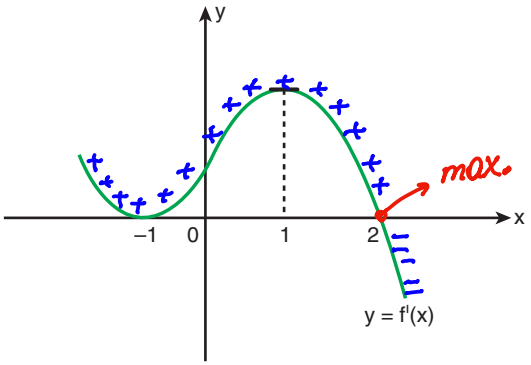
A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I ve III

II. $\Delta \leq 0$ olduğundan daima artandır.

III. Daima artan.

AÇIL MATEMATİK

7. Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. f(4) > f(5) x>2 için azalan f(4)>f(5)

II. f fonksiyonunun yalnızca 1 tane ekstremum noktası vardır. ✓

III. f'(1) = 0 → f'(1) > 0 dır.

öncüllerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) II ve III E) I, II ve III

I ve III doğru

8. $f(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} - 1$

eşitliği ile verilen f fonksiyonunun [–1, 2] aralığında alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) –2 B) $\frac{-5}{2}$ C) –3 D) $\frac{-7}{2}$ E) –4

$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x=0, x=1$

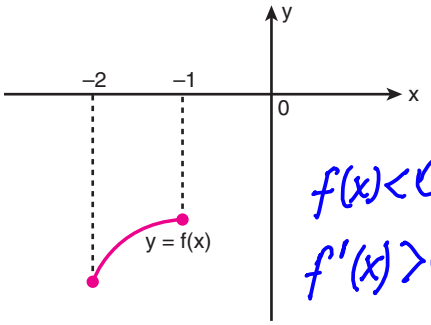
x		0		1	
f'	+	0	–	0	+
		max.		min.	

$f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

$f(-1) = -1 - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$ ✓

$f(2) = 8 - 6 - 1 = 1$

9. Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun [–2, –1] aralığındaki grafiği verilmiştir.



f(x)<0

f'(x)>0

Buna göre,

I. $y = f^2(x) \rightarrow y' = 2f(x).f'(x) < 0$

II. $y = (f \circ f)(x) \rightarrow y' = f'(x).f'(f(x)) > 0$

III. y = |f(x)|

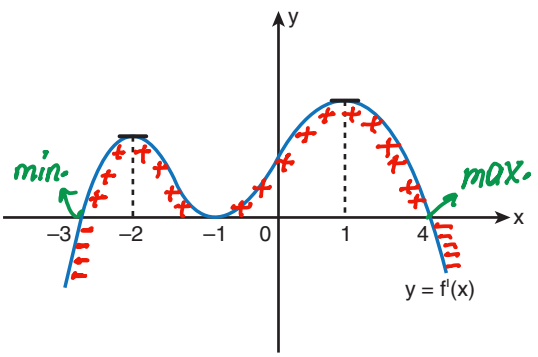
fonksiyonlarından hangileri aynı aralıkta artandır?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) I ve III E) II ve III

III $y = -f(x) \Rightarrow y' = -f'(x) < 0$

10.



Şekilde, y = f'(x) türev fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) x = –3 apsisli nokta f fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisidir.

B) f fonksiyonunun x = –1 de yerel minimumu vardır. ✓

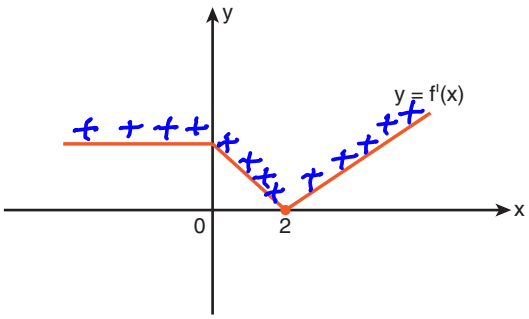
C) f fonksiyonunun x = 4 te yerel maksimumu vardır.

D) f(7) < f(5) tir. x>4 için azalan f(5)>f(7)

E) f' fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi –1 dir.

–2 ve 1 f' nün yerel maksimum
–1 f' nün yerel minimum noktasının apsisidir.

11. Gerçek sayılar kümesi üzerinde türevlenebilir f fonksiyonunun türevi olan f' türev fonksiyonunun grafiği şekilde verilmiştir.



Buna göre,

I. f fonksiyonu daima artandır.

II. f fonksiyonu bire birdir

III. f fonksiyonu her noktada türevlenebilirdir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

Daima artan ise f fonksiyonu 1-1 ve örtendir. Dolayısı ile her nokta da türevlenebilirdir.

12. Tanımlı olduğu aralıklarda f artan ve g azalan fonksiyondur.

Buna göre, $f'>0$ $g'<0$

I. $(f \circ g)(x)$ azalan fonksiyondur.

II. $(g \circ f)(x)$ azalan fonksiyondur.

III. $(f - g)(x)$ artan fonksiyondur.

öncüllerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) I ve III D) II ve III E) I, II ve III

I. $g'(x).f'(g(x))<0$ Azalan

II. $f'(x).g'(f(x))<0$ Azalan

III. $f'(x)-g'(x)>0$ Artan

13. $f(x) = 12x - x^3$

fonksiyonunun [–1, 3] aralığında alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 16 B) 15 C) 14 D) 12 E) 10

$f'(x)=12-3x^2=0 \Rightarrow x=2,\ x=-2$

x		-2		2	
f'	−	0	+	0	−
	↘	min.	↗	max.	↘

$f(2)=24-8=16$

$f(-1)=-12+1=-11$

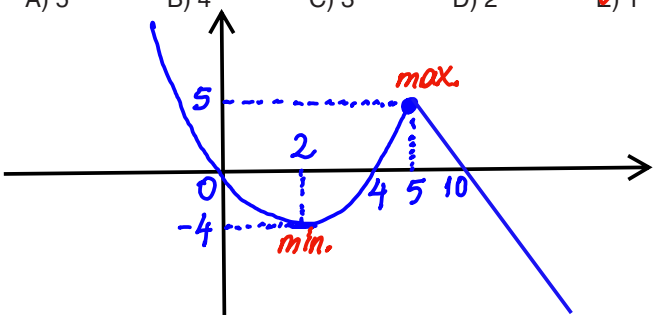
$f(3)=36-27=9$

14. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4x, & x \le 5 \text{ ise} \\ 10-x, & x>5 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun yerel ekstremum değerleri toplamı kaçtır?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1



$(-4)+5=1$

1. C	2. D	3. A	4. C	5. B	6. D	7. C
8. D	9. B	10. B	11. E	12. E	13. A	14. E

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 - 9x + 1$

fonksiyonunun azalan olduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ B) $(-\infty, 1]$ C) $[1, \sqrt{3}]$ D) $[-1, 1]$ E) $[-3, 3]$

$f'(x) = 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

x	$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
f'	+	0 −	0	+

Azalan $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

2. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x - \sqrt{x}$

fonksiyonunun yerel minimum değeri kaçtır?

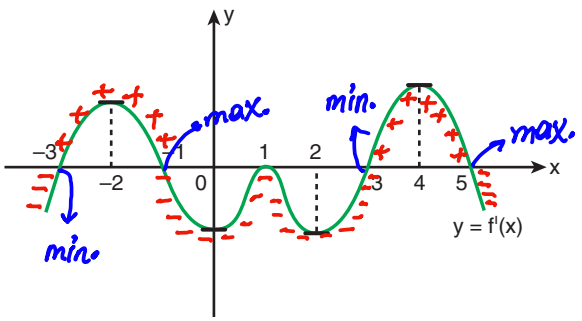
A) $\frac{-1}{16}$ B) $\frac{-1}{8}$ C) $\frac{-1}{4}$ D) $\frac{-1}{2}$ E) -1

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

x		$\frac{1}{4}$	
f'	−	0	+

min. $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{4}$

3.



Şekilde, $y = f'(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $y = f(x)$ fonksiyonunun yerel minimum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

A) −2 B) −1 C) 0 D) 1 E) 2

$(-3) + 3 = 0$

4. $f(x) = 2x^3 - 6x + a - 3$

fonksiyonunun yerel minimum değeri 4 olduğuna göre, a kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 11 E) 12

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$

x		−1		1	
f'	+	0	−	0	+

min.

$f(1) = 2 - 6 + a - 3 = 4$

$a - 7 = 4$

$a = 11$

5. $f : [-3, 0] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x + 5$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 7

$f'(x) = x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 4$

x		−2		4	
f'	+	0	−	0	+

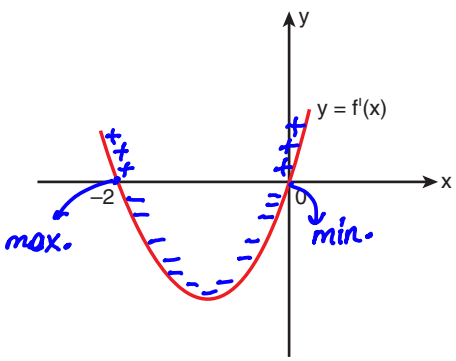
min.

$4 \notin [-3, 0]$

$f(-3) = -9 - 9 + 24 + 5 = 11$

$f(0) = 5$

6. Aşağıda, f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



$f(0) = 0$ dır.

Buna göre,

I. f fonksiyonunun 2 tane ekstremum noktası vardır.

II. $f(-1) > 0$ dır.

III. $f(1) < 0$ dır.

öncüllerinde verilen bilgilerden hangileri doğrudur?

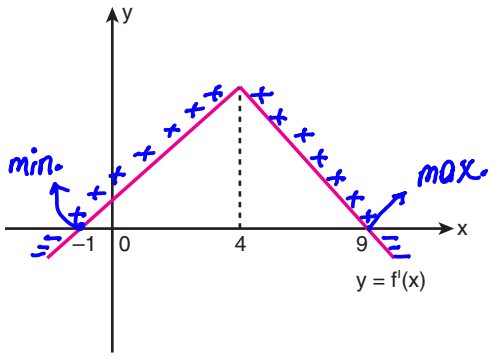
A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

II. $[-2, 0]$ azalan $\longrightarrow -1 < 0 \Rightarrow f(-1) > f(0)$ (0)

III. $[0, 1]$ artan $\longrightarrow 0 < 1 \Rightarrow f(0) < f(1)$ (0)

AÇIL MATEMATİK

7. Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. f fonksiyonunun ekstremum noktalarının apsisler toplamı 8'dir. $(-1)+9=8$

II. $f(8) < f(10)$

III. $f'(1) > f''(6)$ ✓

öncüllerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) I ve III E) I, II ve III

II. $f(8) < f(9)$

$f(9) > f(10)$

III. $f'(1) > 0$, $f''(6) = 0$

$f'(1) > f''(6)$

8. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 2x + 6}$$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

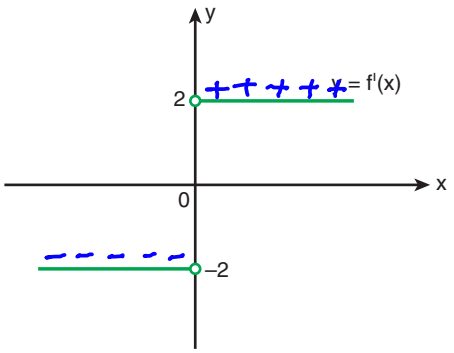
$g(x) = x^2+2x+6$ → min değerini bulalım.

$g'(x) = 2x+2 = 0 \Rightarrow x = -1$

$g(-1) = 1-2+6 = 5$

$f(x)$ in yerel max. değeri $\frac{4}{5}$ olur.

9. Aşağıda gerçel sayılar kümesinde sürekli olan f fonksiyonunun türevinin grafiği gösterilmiştir.



Buna göre,

I. f fonksiyonunun ekstremum noktası yoktur.

II. f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında artandır.

III. $f(-3) < f(-1)$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) I ve III E) II ve III

I. 0 min. noktasının apsisi

II. $[0, \infty)$ Artan

III. $(-\infty, 0]$ Azalan

$-3 < -1 \Rightarrow f(-3) > f(-1)$

10. $\forall x \in \mathbb{R}$ için,

$f'(x) > 0$ ve $g'(x) < 0$ f artan, g azalan

olduğuna göre,

I. $(g \circ f)(3) > (g \circ f)(4)$ ✓

II. $(f \circ g)(2) > (f \circ g)(1)$

III. $(g \circ f)(4) < (g \circ f)(5)$

ifadelerinden hangileri kesinlikle doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II

D) I ve III E) II ve III

$(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) < 0$ Azalan

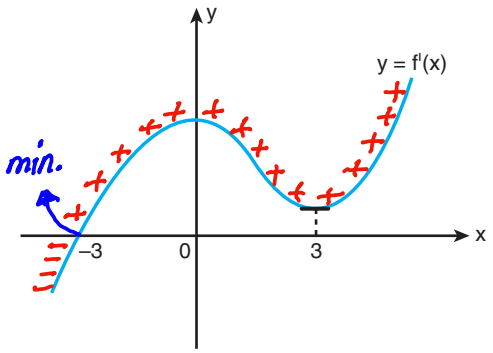
(+) (−)

$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) < 0$ Azalan

(−) (+)

AÇIL MATEMATİK

11.



Yukarıdaki şekilde f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre,

I. f fonksiyonu $[-3, \infty)$ aralığında artandır. ✓

II. $f(3) > f(0)$

III. $f''(4) > 0$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) I ve II C) Yalnız II

D) Yalnız III E) I, II ve III ✓

II. $[-3,\infty)$ artan

$0<3 \Rightarrow f(0) < f(3)$

III. $[3,\infty)$ $f'(x)$ artan olduğundan $f''(4) > 0$ olur.

12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 + 3x^2 - ax + 6$

fonksiyonu bire bir fonksiyondur.

Buna göre, a'nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) –4 B) –3 ✓ C) –2 D) –1 E) 0

$f'(x) = 3x^2 + 6x - a$ (Daima artan olmalı)

$\Delta \le 0$

$36 - 4.3.(-a) \le 0 \Rightarrow a \le -3$

13. Gerçek sayılarda tanımlı,

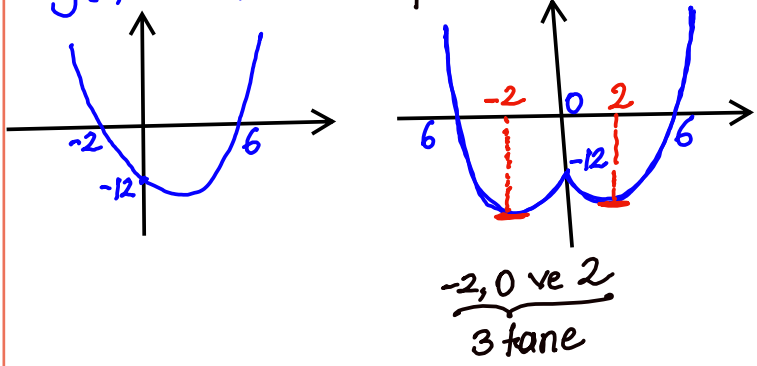
$f(x) = x^2 - 4 \cdot |x| - 12$

fonksiyonunun kaç tane ekstremum noktası vardır?

A) 1 B) 2 C) 3 ✓ D) 4 E) 5

$f(x) = |x|^2 - 4|x| - 12$

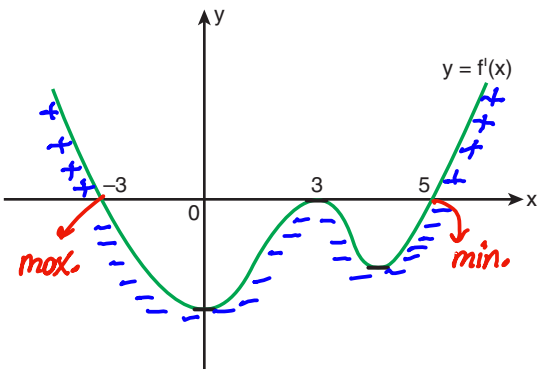
$g(x) = x^2 - 4x - 12 \Rightarrow f(x) = g(|x|)$



-2, 0 ve 2

3 tane

14. Aşağıda f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre,

I. $f(3) > f(5)$ $[3,5]$ azalan $\Rightarrow f(3) > f(5)$

II. $f'(2) > 0$ $[0,2]$ $f' < 0 \Rightarrow f'(2) < 0$

III. $f''(1) > 0$ $[0,3]$ $f'' > 0 \Rightarrow f''(1) > 0$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) II ve III E) I ve III ✓

1. A	2. C	3. C	4. D	5. D	6. C	7. D
8. D	9. B	10. A	11. E	12. B	13. C	14. E

YANINDA BULUNSUN

Maksimum - Minimum Problemleri

Bir büyüklüğün alabileceği en büyük ve en küçük değeri bulmak için maksimum ya da minimum olması istenen ifade bir değişkenli fonksiyon olarak yazılır. Sonra birinci türevi incelenerek maksimum ya da minimum değeri hesaplanır.

ÖRNEK 1.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 6x + 10$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10$

$= 1$

ÖRNEK 2.

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$A = (8 - a) \cdot (a + 4)$

çarpımının sonucu en çok kaçtır?

ÇÖZÜM

$A = -a^2 + 4a + 32$

$A' = -2a + 4 = 0 \Rightarrow a = 2$

$A(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 32$

$= 36$

ÖRNEK 3.

Toplamları 16 olan iki reel sayının çarpımının alabileceği en büyük değer kaçtır?

ÇÖZÜM

$x + y = 16$

$A = x \cdot y \Rightarrow A = x \cdot (16 - x) = -x^2 + 16x$

$A' = -2x + 16 = 0 \Rightarrow x = 8$

$A(8) = 8 \cdot 8 = 64$

ÖRNEK 4.

x TL'ye alınan mal $2x^2 - 7x + 11$ TL'ye satılıyor.

Buna göre, kârın en az olması için x kaç olmalıdır?

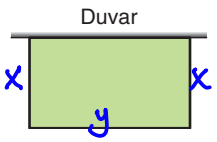
ÇÖZÜM

Kar = Satış - Alış

$K = 2x^2 - 7x + 11 - x = 2x^2 - 8x + 11$

$K' = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$

ÖRNEK 5.



Şekilde görüldüğü gibi bir kenarı duvar olan dikdörtgen şeklindeki bir bahçenin üç kenarına bir sıra dikenli tel çekilecektir.

Kullanılan telin uzunluğu 120 m olduğuna göre, bahçenin alanı en çok kaç m^2 dir?

ÇÖZÜM

$2x + y = 120 \Rightarrow y = 120 - 2x$

$A = x \cdot y \Rightarrow A = x \cdot (120 - 2x) = -2x^2 + 120x$

$A' = -4x + 120 = 0 \Rightarrow x = 30$

$A(30) = 30 \cdot 60 = 1800$

ÖRNEK 6.

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 5x + \frac{35}{x}$

fonksiyonunun alabileceği en küçük değer kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 5 - \frac{35}{x^2} \Rightarrow x^2 = 7$

$x = \sqrt{7}$

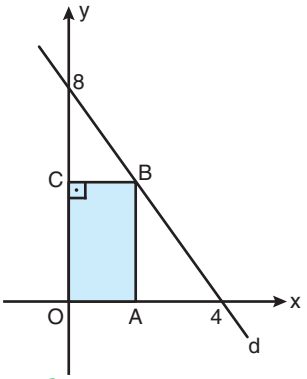
$f(\sqrt{7}) = 5\sqrt{7} + \frac{35}{\sqrt{7}} = 10\sqrt{7}$

$(\sqrt{7})$

1. 1	2. 36	3. 64	4. 2	5. 1800	6. $10\sqrt{7}$

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 7.



Şekilde bir köşesi orijinde bir köşesi d doğrusu üzerinde olan OABC dikdörtgeni veriliyor.

Buna göre, dikdörtgenin alanının alabileceği en büyük değer kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

PRATİK: Dikdörtgenin alanı en fazla üçgenin alanının yarısı kadardır.

$$A(OABC) = \frac{(8.4)/2}{2} = 8$$

ÖRNEK 8.

Bir kare dik prizmanın taban çevresi ile yüksekliğinin toplamı 8 cm'dir.

Buna göre, bu prizmanın hacmi en büyük değerini aldığında yüksekliği kaç cm olur?

ÇÖZÜM

$4x+y=8 \Rightarrow y=8-4x$

$V=x^2.y \Rightarrow V=x^2(8-4x)=-4x^3+8x^2$

$V'=-12x^2+16x=0 \Rightarrow x=4/3$

$y=8-\frac{16}{3} \Rightarrow y=8/3$

ÖRNEK 9.

Her yolcu için uçak bilet fiyatının 180 TL olduğu bir havayolu şirketinde 40 kişiden fazla yolcu olduğunda her yolcu için bilet fiyatı 2 TL düşmektedir.

Örneğin; uçağa 42 yolcu binerse her yolcu 176 TL bilet parası ödüyor.

Buna göre, havayolu şirketinin kazancının en çok olması için uçağa kaç yolcunun binmesi gerekir?

ÇÖZÜM

x yolcu olsun.

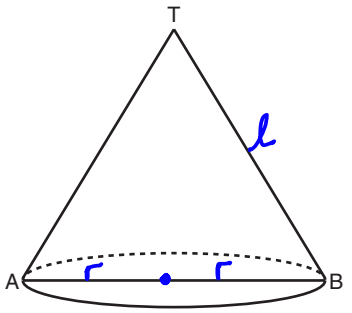
$A=[180-(x-40).2].x$

$A=(260-2x).x=-2x^2+260x$

$A'=-4x+260=0 \Rightarrow x=65$

ÖRNEK 10.

Şekilde verilen dik koninin taban çapı ile ana doğrusunun uzunluğu toplamı 12 cm'dir.



Buna göre, koninin yanal alanı en fazla kaç cm^2 dir?

ÇÖZÜM

$2r+l=12 \Rightarrow l=12-2r$

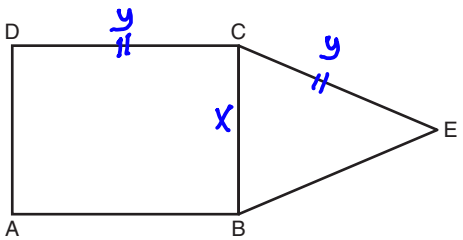
$Y=\pi.r.l \Rightarrow Y=\pi r(12-2r)=\pi.(12r-2r^2)$

$Y'=\pi.(12-4r)=0 \Rightarrow r=3$

$Y(3)=\pi.3.(12-6)=18\pi$

ÖRNEK 11.

Bir halı imalatçısına aşağıdaki modelde halı sipariş edilmiştir. Model dikdörtgen ve üçgenden oluşmaktadır.



Siparişte, dikdörtgen kısmın alanının 9 birimkare olması ve |DC| = |CE| eşitliğinin sağlanması ayrıca belirtilmiştir.

Buna göre, |BC| + |CE| toplamı en az kaç birim olabilir?

ÇÖZÜM

$x.y=9 \Rightarrow y=\frac{9}{x}$

$A=x+y \Rightarrow A=x+\frac{9}{x}$

$A'=1-\frac{9}{x^2}=0 \Rightarrow x=3$

$A(3)=3+\frac{9}{3}=6$

7. 8	8. $\frac{8}{3}$	9. 65	10. 18π	11. 6

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 12.

$y = x^2$ eğrisine ait iki noktanın apsisleri farkı 1'e eşittir.

Buna göre, bu iki noktanın birbirine uzaklığı en az kaç birim olabilir?

ÇÖZÜM

$A(a, a^2)$ $B(b, b^2)$ $b-a=1$

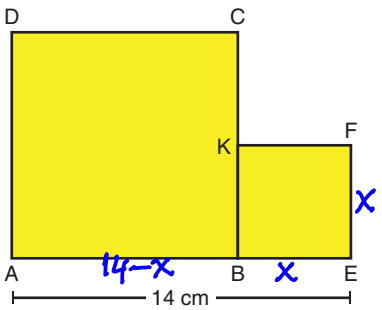
$b=a+1 \Rightarrow B(a+1, a^2+2a+1)$

$|AB| = \sqrt{1^2+(2a+1)^2} = \sqrt{4a^2+4a+2}$

$|AB|' = \dfrac{8a+4}{2\cdot\sqrt{4a^2+4a+2}} = 0 \Rightarrow a = -1/2$

$|AB| = \sqrt{4\cdot\frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 2} = \sqrt{1} = 1$

ÖRNEK 13.



Şekilde kenar uzunlukları cm cinsinden birer tam sayı olan ABCD ve BEFK kareleri gösterilmiştir.

$|AE| = 14$ cm ve $k > 1$ olmak üzere, $\dfrac{|AB|}{|BE|} = k$'dır.

Buna göre, boyalı alanlar toplamının en az olması için k kaçtır?

ÇÖZÜM

$A = (14-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 28x + 196$

$A' = 4x - 28 = 0 \Rightarrow x = 7$

$x = 7$ olduğunda $k = 1$ olur.

$x = 6$ alabiliriz.

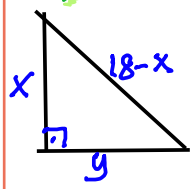
$|AB| = 8$ $|BE| = 6$

$k = \dfrac{|AB|}{|BE|} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

ÖRNEK 14.

Bir dik kenar uzunluğu ile hipotenüs uzunluğunun toplamı 18 cm olan bir dik üçgenin alanının alabileceği en büyük değer kaç cm^2 olur?

ÇÖZÜM



$y^2 + x^2 = (18-x)^2$

$y^2 = 324 - 36x$

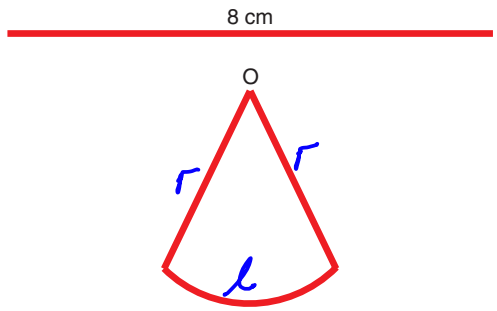
$x = \dfrac{324-y^2}{36}$

$A = \dfrac{1}{2}\cdot xy = \dfrac{1}{2}y\left(\dfrac{324-y^2}{36}\right) = \dfrac{1}{72}(324y - y^3)$

$A' = \dfrac{1}{72}(324 - 3y^2) = 0 \Rightarrow y = 6\sqrt{3} \Rightarrow x = 6$

$A_{alan} = A = \dfrac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 6 = 18\sqrt{3}$

ÖRNEK 15.



8 cm uzunluğundaki bir tel bükülerek şekildeki gibi O merkezli daire dilimi elde ediliyor.

Buna göre, bu dilimin alanı en çok kaç cm^2 olur?

ÇÖZÜM

$2r + l = 8 \Rightarrow l = 8 - 2r$

$A = \dfrac{r\cdot l}{2} = \dfrac{r}{2}(8-2r) = 4r - r^2$

$A' = 4 - 2r = 0 \Rightarrow r = 2$

$A(2) = 8 - 4 = 4$

12. 1	13. $\frac{4}{3}$	14. $18\sqrt{3}$	15. 4

AÇIL MATEMATİK

1. **Farkları 6 olan iki reel sayının çarpımının sonucu en az kaçtır?**

A) –15 B) –12 C) –9 D) –6 E) –4

$x-y=6 \Rightarrow y=x-6$

$A=x.y \Rightarrow A=x.(x-6)$

$A=x^2-6x \Rightarrow A'=2x-6=0$

$x=3$

$A(3)=3.-3=-9$

2. x ve y gerçel sayılar olmak üzere,

$x + y^2 = 12 \Rightarrow x=12-y^2$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, x • y çarpımının sonucu en çok kaçtır?

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

$A=(12-y^2).y=-y^3+12y$

$A'=-3y^2+12=0 \Rightarrow y=2$

$y=2 \Rightarrow x=8$

$x.y=2.8=16$

3. a ve b birer reel sayı olmak üzere,

$A=(x-a)^2+(x-b)^2$

ifadesi x'in hangi değeri için en küçük değerini alır?

A) a + b B) a + 2b C) b + 2a D) $\frac{a+b}{2}$ E) 2 • (a + b)

$A=2x^2-2ax-2bx+a^2+b^2$

$A'=4x-2a-2b=0$

$x=\frac{a+b}{2}$

4. a ∈ ℝ olmak üzere,

$x^2 + (a – 1)x + a + 2 = 0$

denkleminin diskriminantı en az kaçtır?

A) –16 B) –12 C) –8 D) –6 E) –4

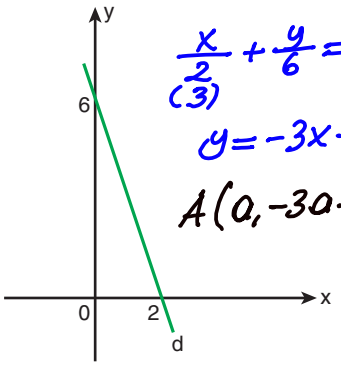
$\Delta=(a-1)^2-4.(a+2)$

$\Delta=a^2-6a-7 \Rightarrow \Delta'=2a-6=0$

$a=3$

$\Delta(3)=2^2-4.5=-16$

5. Aşağıda, d doğrusunun grafiği verilmiştir.



$\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$

(3)

$y=-3x+6$

$A(a,-3a+6)$

Doğru üzerindeki noktalardan biri A(a, b) dir.

Buna göre, a • b çarpımı en büyük değerini aldığında b kaç olur?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$A=a.(-3a+6)=-3a^2+6a$

$A'=-6a+6=0 \Rightarrow a=1$

$a=1 \Rightarrow b=-3+6=3$

6. f : [–1, ∞) → ℝ olmak üzere,

$f(x)=\sqrt{x+1}$

$B(a^2-1, a)$ olsun.

fonksiyonunun A(3, 0) noktasına en yakın olan noktasının apsisi kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2 E) $\frac{5}{2}$

$|AB|=\sqrt{(a^2-4)^2+a^2}=\sqrt{a^4-7a^2+16}$

$|AB|'=\frac{4a^3-14a}{2\sqrt{a^4-7a^2+16}}=0 \Rightarrow a^2=7/2$

$B\left(\frac{7}{2}-1, \frac{7}{2}\right)=B\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

ACİL MATEMATİK

7. $f(x) = x^2 + 3x + 7$

parabolü üzerindeki noktalardan koordinatları toplamı en az olan nokta aşağıdakilerden hangisidir?

A) (–1, 3) B) (–2, 5) C) (0, 3)
D) (1, 4) E) (–3, 3)

$A(x, x^2+3x+7)$

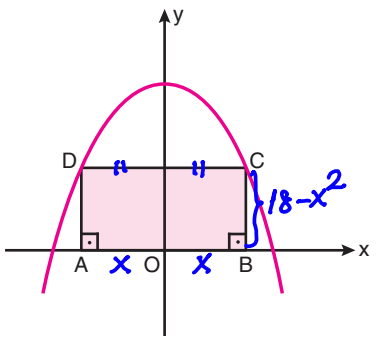
$T = x^2+3x+7+x = x^2+4x+7$

$T' = 2x+4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$A(-2, 4-6+7)$

$A(-2, 5)$

8. Şekilde iki köşesi $y = 18 - x^2$ parabolü, diğer köşeleri x ekseni üzerinde olan ABCD dikdörtgeni veriliyor.



Buna göre, dikdörtgenin alanının alabileceği en büyük değer kaç birimkaredir?

A) $12\sqrt{3}$ B) $12\sqrt{6}$ C) $18\sqrt{6}$
D) $24\sqrt{3}$ E) $24\sqrt{6}$

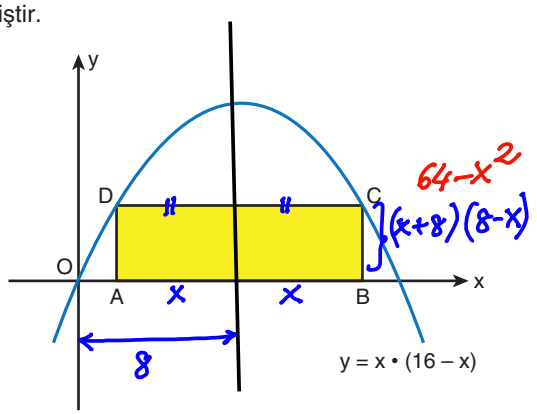
$A = 2x.(18-x^2) = -2x^3+36x$

$A' = -6x^2+36 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{6}$

$A(\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}.(18-6)$

$= 24\sqrt{6}$

9. Aşağıda, $y = x \cdot (16 - x)$ parabolü ile ABCD dikdörtgeni gösterilmiştir.



Buna göre, ABCD dikdörtgeninin çevre uzunluğu en fazla olduğunda |BC| kaç birimdir?

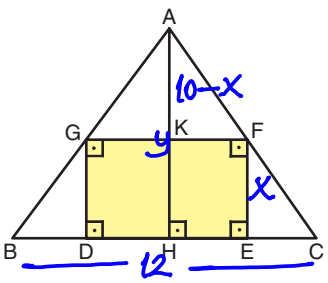
A) 45 B) 48 C) 56 D) 60 E) 63

$Ç = 2.(2x+64-x^2) = -2x^2+4x+128$

$Ç' = -4x+4 = 0 \Rightarrow x = 1$

$|BC| = 64-1^2 = 63$

10.



ABC üçgeninde,
|BC| = 12 cm
|AH| = 10 cm

Buna göre, DEFG dikdörtgeninin alanının alabileceği en büyük değer kaç cm^2 dir?

A) 24 B) 25 C) 30 D) 36 E) 40

$\frac{10-x}{10} = \frac{y}{12} \Rightarrow 60-6x = 5y$

$A = x.y \Rightarrow A = x.\left(\frac{60-6x}{5}\right) = 12x - \frac{6x^2}{5}$

$A' = 12 - \frac{12x}{5} = 0 \Rightarrow x = 5$

$A(5) = 5.\frac{60-30}{5} = 30$

KISA YOL $A = \frac{(10.12)/2}{2} = 30$

ACİL MATEMATİK

11. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 10$

fonksiyonuna herhangi bir noktasından çizilen teğetinin eğimi en az kaç olabilir?

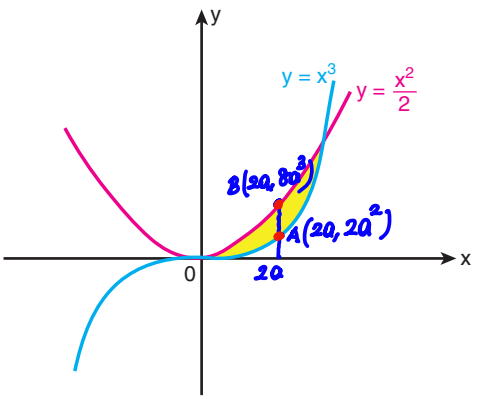
A) –14 B) –12 C) –10 D) –8 E) –6

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 5$ (Eğim)

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f'(-1) = 3 - 6 - 5 = -8$

12. Aşağıda $y = x^3$ ve $y = \frac{x^2}{2}$ eğrileri verilmiştir.



Şekildeki boyalı bölgeye, y eksenine paralel olacak biçimde çizilebilecek bir doğru parçasının uzunluğu en çok kaç birim olabilir?

A) $\frac{1}{54}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{2}{27}$ E) $\frac{1}{27}$

$|AB| = \sqrt{(2a-2a)^2 + (8a^3 - 2a^2)^2}$

$|AB| = |8a^3 - 2a^2|$

$|AB|' = 24a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a = 1/6$

$|AB|(1/6) = 8.\frac{1}{6^3} - 2.\frac{1}{36}$

$= \frac{1}{27} - \frac{1}{18} = -\frac{1}{54}$

(2) (3)

uzunluk pozitif olacağı için $\frac{1}{54}$

13. $x > 6$ olmak üzere,

$A = 2x + 4 + \frac{2}{x-6}$

ifadesinin en küçük değeri kaçtır?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 22 E) 24

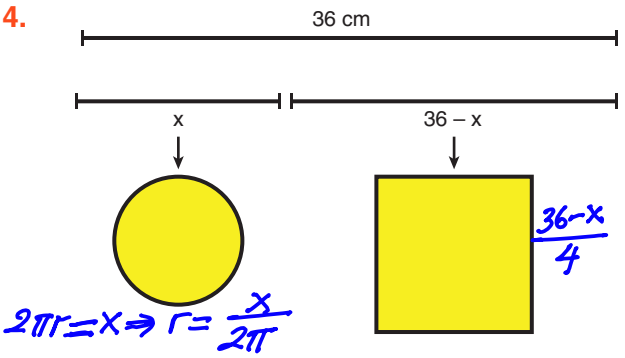
$A' = 2 - \frac{2}{(x-6)^2} = 0$

$(x-6)^2 = 1 \Rightarrow x-6 = 1 \quad \vee \quad x-6 = -1$

$x = 7 \qquad x = 5$

$A(7) = 14 + 4 + \frac{2}{1} = 20$

14.



Uzunluğu 36 cm olan bir tel, x cm ve (36 – x) cm uzunluğunda olan iki parçaya ayrıldıktan sonra x cm uzunluğundaki tel bükülerek bir daire (36 – x) cm uzunluğundaki tel bükülerek bir kare oluşturuluyor.

Buna göre, daire ve karenin alanları toplamının en küçük olması için x kaç cm olmalıdır?

A) $\frac{18\pi}{\pi+2}$ B) $\frac{20\pi}{\pi+4}$ D) $\frac{36\pi}{\pi+4}$ D) $\frac{36\pi}{\pi+6}$ E) $\frac{48\pi}{\pi+6}$

$A = \pi.\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{36-x}{4}\right)^2$

$A' = \frac{2x}{4\pi} - \frac{1}{4}.2.\left(\frac{36-x}{4}\right) = 0$

$\frac{x}{\pi} = \frac{36-x}{4} \Rightarrow 4x + \pi x = 36\pi$

$x = \frac{36\pi}{\pi+4}$

1. C	2. B	3. D	4. A	5. C	6. E	7. B
8. E	9. E	10. C	11. D	12. A	13. C	14. C

YANINDA BULUNSUN

Fonksiyonların Grafiklerinin Çizimi

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki sıra takip edilir.

1. Fonksiyonun en geniş tanım aralığı bulunur.
2. x ve y eksenlerinin kesim noktaları bulunur. Gerekirse özel değerler verilir.
3. Fonksiyonun birinci türevi alınarak artan ve azalan olduğu aralıklar, ekstremum noktaları bulunur.
4. Değişim tablosu düzenlenerek grafik çizilir.

Polinom Fonksiyonların Grafik Çizimleri

Polinom fonksiyonlar $\mathbb{R}$'de tanımlıdır.

ÖRNEK 1.

$f(x) = (4 - x) \cdot (x + 2)$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

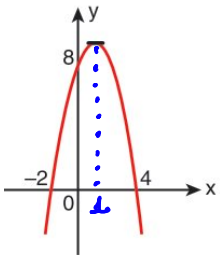
1. T.K = R
2. x=0 için y=8
   y=0 için x=-2, x=4

ÇÖZÜM

3. $f(x) = -x^2 + 2x + 8$
   $f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

4.

x		1	
f'	+	0	−



ÖRNEK 2.

$f(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

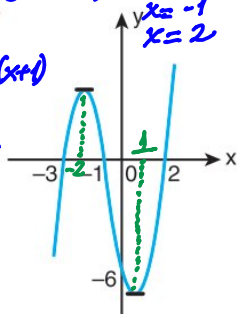
1. T.K = R
2. x=0 için y=-6
   y=0 için x=-3, x=-1, x=2

ÇÖZÜM

3. $f'(x) = (x+1)(x+3) + (x-2)(x+3) + (x-3)(x+1)$
   $f'(x) = x^2 + 4x + 3 + x^2 + x - 6 + x^2 - 2x - 3$
   $f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$

4.

x		-2		1	
f'	+	0	−	0	+



ÖRNEK 3.

$f(x) = x(x - 2)^2$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

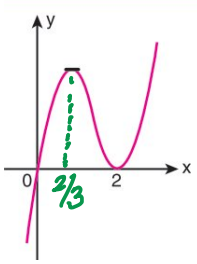
1. T.K = R
2. x=0 için y=0
   y=0 için x=0, x=2

ÇÖZÜM

3. $f'(x) = (x-2)^2 + x \cdot 2(x-2) = 0$
   $(x-2)(x-2+2x) = 0$
   $x = 2, \quad x = 2/3$

4.

x		2/3		2	
f'	+	0	−	0	+



ÖRNEK 4.

$f(x) = \frac{1}{8}(x-1)^2 \cdot (x-4)^2$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

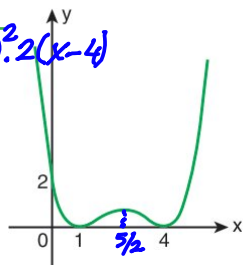
1. T.K = R
2. x=0 için y=2
   y=0 için x=1, x=4

ÇÖZÜM

3. $f'(x) = \frac{1}{8} \cdot 2(x-1)(x-4)^2 + \frac{1}{8}(x-1)^2 \cdot 2(x-4)$
   $f'(x) = \frac{1}{4}(x-1)(x-4)(2x-5) = 0$

4.

x		1		5/2		4	
f'(x)	−	0	+	0	−	0	+



ÖRNEK 5.

$f(x) = \frac{1}{16}(x+1)(x-2)(x+4)^2$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

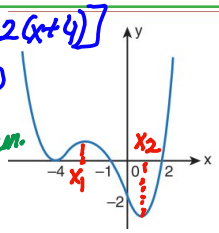
1. T.K = ℝ
2. x=0 için y=-2
   y=0 için x=-1, x=2, x=-4

ÇÖZÜM

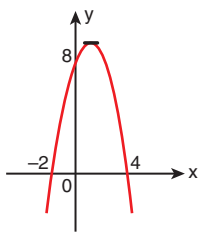
3. $f'(x) = \frac{1}{16}\left[(2x-1)(x+4)^2 + (x^2-x-2) \cdot 2(x+4)\right]$
   $f'(x) = \frac{1}{16}(x+4)(4x^2+5x-8) = 0$
   $\Delta > 0$ kökler x_1 ve x_2 olsun.

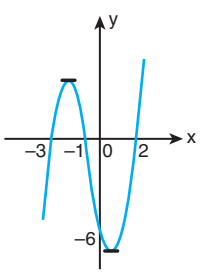
4.

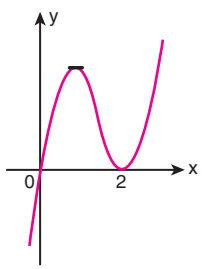
x		-4		x_1		x_2	
f'(x)	−	0	+	0	−	0	+

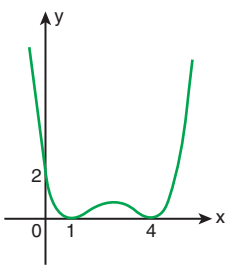


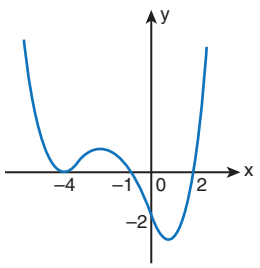
ACİL MATEMATİK

1.


2.


3.


4.


5.


ÖRNEK 6.

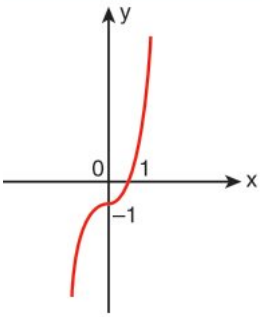
$f(x) = x^3 - 1$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

1. T.K = R
2. x = 0 için y = −1
   y = 0 için x = 1
3. $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0^*$
4.

x		0	
f'(x)	+	0	+



ÖRNEK 7.

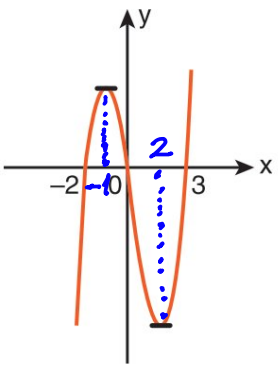
$f(x) = x^3 - x^2 - 6x$

fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

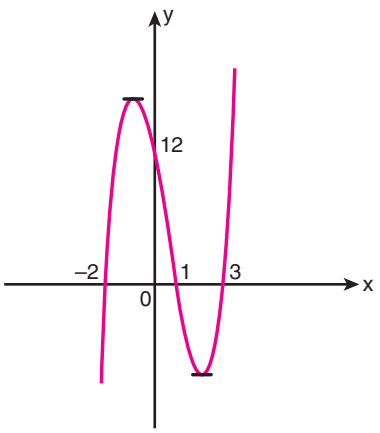
1. Ç.K = R
2. x = 0 için y = 0
   y = 0 için x = 0, x = −2, x = 3
3. $f'(x) = 3x^2 - 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$, $x = -1$
   $x^2 - x - 2 = 0$ (−2, +1)
4.

x		−1		2	
f'(x)	+	0	−	0	+



ÖRNEK 8.

Aşağıda üçüncü dereceden bir polinom fonksiyon grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$f(x) = a \cdot (x+2)(x-1)(x-3)$

$f(0) = 12 \Rightarrow 6a = 12$

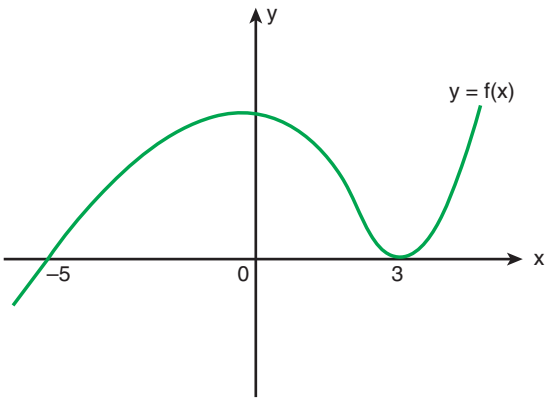
$a = 2$

$f(x) = 2 \cdot (x-1)(x-3)(x+2)$

ÖRNEK 9.

$f(x) = (x - a) \cdot (x + b)^2$

fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



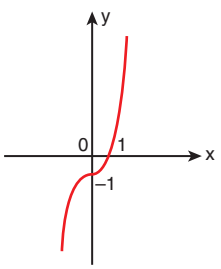
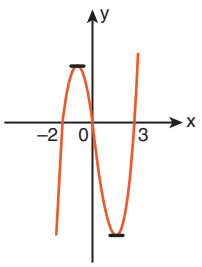
Buna göre, a – b farkı kaçtır?

ÇÖZÜM

$x = a = -5$ $\quad x = -b = 3$

$a = -5$ $\quad b = -3$

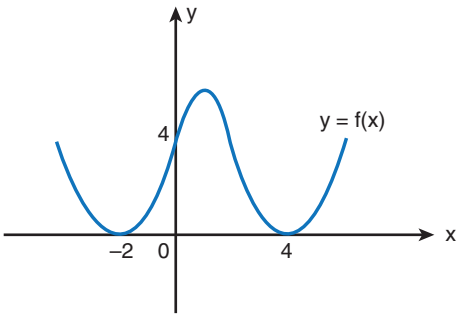
$a - b = -5 + 3 = -2$

6.	7.
	
8. $2(x-1)(x-3)(x+2)$	**9.** −2

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 10.

Aşağıda 4. dereceden f polinom fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, f(8) kaçtır?

ÇÖZÜM

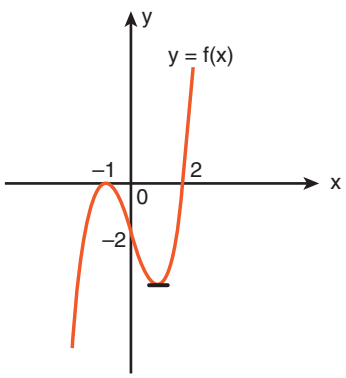
$f(x) = a \cdot (x+2)^2 \cdot (x-4)^2$

$f(0) = 4 \Rightarrow 4 \cdot 16 \cdot a = 4 \Rightarrow a = 1/16$

$f(8) = \frac{1}{16} \cdot 10^2 \cdot 4^2 = 100$

ÖRNEK 11.

Aşağıda üçüncü dereceden f polinom fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, f fonksiyonunun yerel minimum değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = a \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)$

$f(0) = -2 \Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1$

$f'(x) = 2(x+1) \cdot (x-2) + (x+1)^2 \cdot 1 = 0$

$(x+1) \cdot (3x-3) = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$

x		–1		1	
f'(x)	+	0	–	0	+
	↗	mak.	↘	min.	↗

$f(1) = 2^2 \cdot -1$

$f(1) = -4$

ÖRNEK 12.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

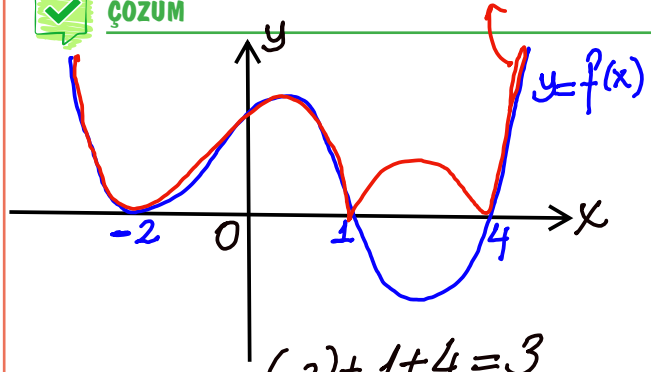
$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1) \cdot (x-4)$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, y = |f(x)| fonksiyonunun yerel minimum noktalarının apsisler toplamı kaçtır?

$y = |f(x)|$

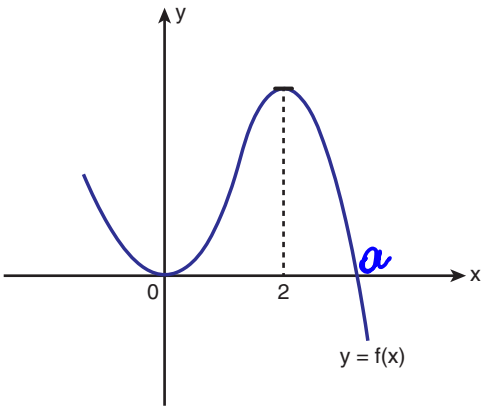
ÇÖZÜM



$(-2) + 1 + 4 = 3$

ÖRNEK 13.

Aşağıda grafiği verilen f fonksiyonu, üçüncü dereceden ve başkatsayısı –1 olan bir polinomdur.



Buna göre, f(2) kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = -1 \cdot x^2 \cdot (x-a) = -x^3 + ax^2$

$f'(x) = -3x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2a/3$

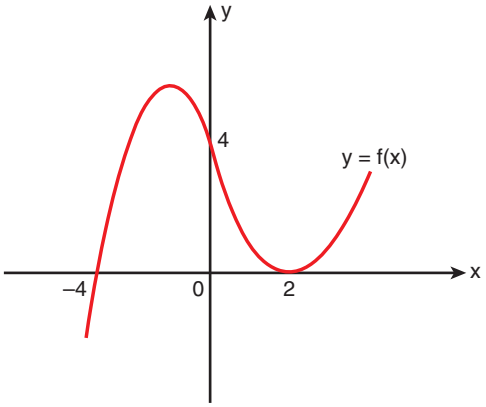
$\frac{2a}{3} = 2 \Rightarrow a = 3$

$f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 = 4$

10. 100	11. –4	12. 3	13. 4

AÇIL MATEMATİK

1. Aşağıda 3. dereceden f polinom fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, f(4) kaçtır?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

$f(x) = a\cdot(x+4)\cdot(x-2)^2$

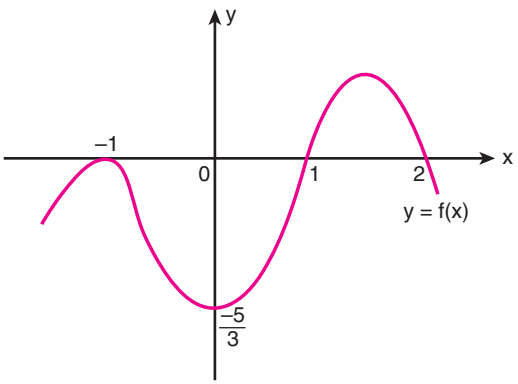
$f(0)=4 \Rightarrow 16a=4 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$

$f(4)=\frac{1}{4}\cdot 8\cdot 4=8$

2. Aşağıda,

$f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-1) \cdot (ax+b)$

fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, a – b farkı kaçtır?

A) –1 B) $\frac{-5}{4}$ C) $\frac{-5}{3}$ D) $\frac{-5}{2}$ E) –2

$f(0)=\frac{-5}{3} \Rightarrow -b=\frac{-5}{3} \Rightarrow b=\frac{5}{3}$

$f(2)=0 \Rightarrow 9\cdot(2a+b)=0 \Rightarrow a=\frac{-5}{6}$

$a-b=-\frac{5}{6}-\frac{5}{3}=\frac{-15}{6}=-\frac{5}{2}$ (2)

3. I. $f(x) = x^2 \cdot (x+3)^2$

II. $g(x) = (x^2+x+1) \cdot (x-2)^2$

III. $h(x) = x^2 + x^4$

fonksiyonlarından hangilerinin grafiğinin x ekseninin altında kalan kısmı yoktur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

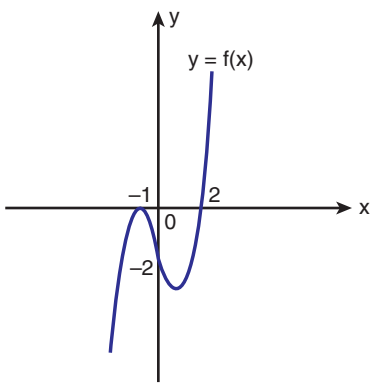
I. $f(x)=x^2\cdot(x+3)^2=\underbrace{(x\cdot(x+3))^2}_{\text{Daima pozitif}}$

II. $g(x)=\underbrace{(x^2+x+1)}_{\Delta<0}\cdot(x-2)^2$ Daima pozitif

III. $h(x)=x^2\cdot(1+x^2)$ Daima pozitif

4. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

olmak üzere, f fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre, f(1) + c toplamı kaçtır?

A) –10 B) –9 C) –8 D) –7 E) –6

$f(x)=a\cdot(x+1)^2\cdot(x-2)$

$f(0)=-2 \Rightarrow -2a=-2 \Rightarrow a=1$

$f(x)=(x^2+2x+1)\cdot(x-2)=x^3-3x-2$

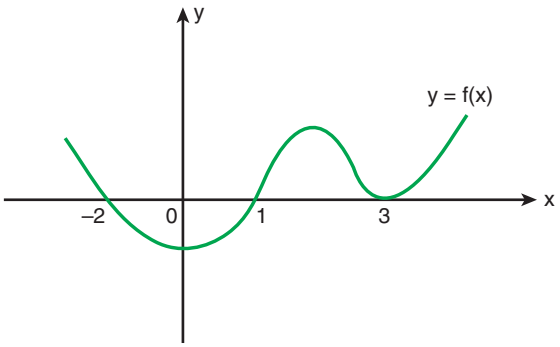
$f(1)=1-3-2=-4$ ve $c=-3$

$f(1)+c=-4-3=-7$

AÇIL MATEMATİK

5. $f(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



Buna göre, c kaçtır?

A) –2 B) –1 C) 1 D) 2 E) 3

$f(x) = (x+2).(x-1).(x-3)^2$

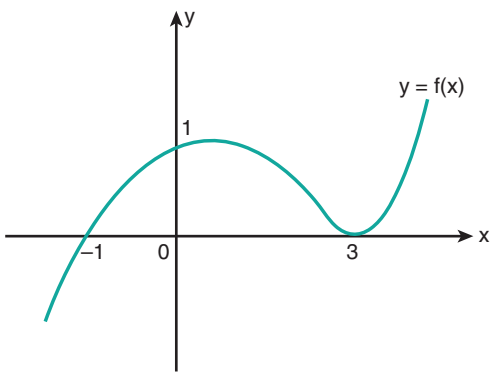
$f(x) = (x^2+x-2).(x^2-6x+9)$

$9x^2 - 2x^2 - 6x^2 = x^2$

$c = 1$

6. Aşağıda f fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.

$f(x) = (ax + b) \cdot (x + c)^2$ dir.



Buna göre, a • c + b ifadesinin değeri kaçtır?

A) $\frac{-1}{3}$ B) $\frac{-2}{9}$ C) $\frac{-1}{4}$ D) $\frac{-1}{6}$ E) $\frac{-1}{9}$

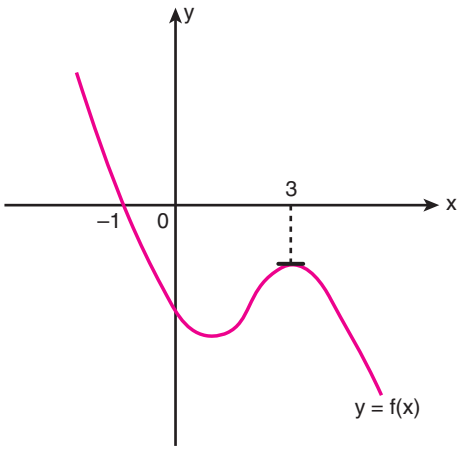
$f(x) = a.(x+1).(x-3)^2$

$f(0) = 1 \Rightarrow 9a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$

$a = \frac{1}{9}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -3$

$a.c + b = \frac{1}{9}.(-3) + \frac{1}{9} = \frac{-2}{9}$

7. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



$f(x) = ax^3 + 2x^2 - 3x + b$

olduğuna göre, $\frac{b}{a}$ oranı kaçtır?

A) 12 B) 13 C) 14 D) 15 E) 16

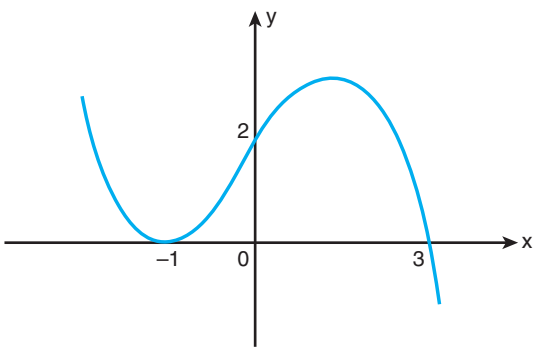
$f(-1) = -a + 2 + 3 + b = 0 \Rightarrow a - b = 5$

$f'(3) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 4x - 3$

$f'(3) = 27a + 9 = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$

$a = \frac{-1}{3} \Rightarrow b = \frac{-16}{3}$ $\quad \frac{b}{a} = 16$

8.



Şekilde grafiği verilen üçüncü dereceden polinom fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi kaçtır?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{8}{3}$

$f(x) = a.(x+1)^2.(x-3)$ $\quad f(0) = 2 \Rightarrow -3a = 2$

$a = -\frac{2}{3}$

$f'(x) = \frac{-2}{3}[2(x+1)(x-3) + (x+1)^2.1] = 0$

$\frac{-2}{3}.(x+1).(3x-5) = 0 \Rightarrow x = -1, \; x = 5/3$

1. C	2. D	3. E	4. D	5. C	6. B	7. E	8. C

x		–1		5/3	
f'(x)	–	0	+	0	–
	↘	min.	↗	max.	↘

ACİL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

Diferansiyel

x değişkeninde meydana gelen sıfıra yakın değişim dx ile ifade edilir. Bu değişime bağlı olarak y = f(x) fonksiyonundaki değişim de dy ile gösterilir.

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ olduğuna göre, f(x) fonksiyonunun diferansiyeli

$dy = f'(x)dx$

şeklinde elde edilir.

Aynı şekilde f(x) türevlenebilen bir fonksiyon ise

$\frac{d(f(x))}{dx} = f'(x)$

$d(f(x)) = f'(x)dx$ ifadesi f(x) fonksiyonunun diferansiyelidir.

ÖRNEK 1.

$f(x) = x^2 - 4x + 7$

fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

ÇÖZÜM

$d(f(x)) = (2x - 4)\,dx$

ÖRNEK 2.

$f(u) = \sqrt{u} - u + 1$

fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

ÇÖZÜM

$d(f(u)) = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}} - 1\right)du$

ÖRNEK 3.

$f(t) = \frac{2t - 1}{4t + 3}$

fonksiyonunun diferansiyelini bulunuz.

ÇÖZÜM

$d(f(t)) = \frac{10}{(4t+3)^2}dt$

ÖRNEK 4.

Aşağıda diferansiyeli alınan fonksiyonları inceleyiniz.

- $y = x^3 + x + 1$ ise $dy = (3x^2 + 1)\,dx$
- $u = (x + 2)^2$ ise $du = 2(x + 2)dx$
- $x = 3u^2 + u + 1$ ise $dx = (6u + 1)du$
- $u = (2t^2 + t)^2$ ise $du = 2(2t^2 + t)(4t + 1)dt$

AÇIL MATEMATİK

1. $(2x - 4)dx$	2. $\left(\frac{1}{2\sqrt{u}} - 1\right)du$	3. $\frac{10}{(4t+3)^2}dt$

YANINDA BULUNSUN

Belirsiz İntegral

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ve $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı ve türevlenebilir f ve F fonksiyonları verilmiş olsun.

Her $x \in (a, b)$ için $F'(x) = f(x)$ ise $F(x) + c$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun ilkeli, belirsiz integrali veya ters türevi denir. $(c \in \mathbb{R})$

$F(x) = x^3 \Rightarrow F'(x) = 3x^2 = f(x)$

$F(x) = x^3 + 4 \Rightarrow F'(x) = 3x^2 = f(x)$

$F(x) = x^3 - 8 \Rightarrow F'(x) = 3x^2 = f(x)$

$F(x) = x^3 + c \Rightarrow F'(x) = 3x^2 = f(x)$

Yukarıda görüldüğü gibi belirsiz integral ifadesi sabitin türevinin sıfır olmasından kaynaklanmaktadır.

$F'(x) = f(x) \Rightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$ dir.

$\int f(x)dx$ demek x'e göre türevi f(x) olan F(x) fonksiyonlarının kümesini bulmak demektir.

$\int \rightarrow$ integral işareti

c: integral sabitidir.

ÖRNEK 5.

$\int 4dx$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int 4.dx = 4x + C$

ÖRNEK 6.

$\int (2x - 3)dx$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\int (2x-3)dx = x^2 - 3x + C$

YANINDA BULUNSUN

Belirsiz İntegralin Özellikleri

1. $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

Belirsiz integralin türevi integral içindeki fonksiyona eşittir. Kısaca bir fonksiyonun tersinin tersi gibi düşünülebilir.

ÖRNEK 7.

$\frac{d}{dx}\left(\int (x^2 - 4x + 1)dx\right)$

ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$\frac{d}{dx}\left(\int (x^2-4x+1)dx\right) = x^2-4x+1$

ÖRNEK 8.

$f(x) = x + \frac{d}{dx}\left(\int \frac{x^3}{x^2 - 8}dx\right)$

olduğuna göre, f(3) kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = x + \frac{x^3}{x^2-8}$

$f(3) = 3 + \frac{27}{1}$

$f(3) = 30$

5. $4x + c$	6. $x^2 - 3x + c$	7. $x^2 - 4x + 1$	8. 30

ACİL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

$F'(x) = f(x)$

$d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)'dx$

$= [F(x) + c]'dx$

$= f(x)\,dx$

Kısaca integralin diferansiyeli integral içindeki ifadeye eşittir.

Örnek:

- $d\left(\int x^2dx\right) = x^2dx$
- $d\left(\int (x-2)\,dx\right) = (x-2)\,dx$
- $d\left(\int (2u+\sin u)\,du\right) = (2u+\sin u)\,du$

YANINDA BULUNSUN

3. $\int d(f(x)) = \int f'(x)dx = f(x) + c$ dir.

Kısaca integral içinde diferansiyel, fonksiyonun c sabiti ile toplamına eşittir.

Örnek:

- $\int dx = x + c$
- $\int d(x^2) = x^2 + c$
- $\int d(x^3 - x) = x^3 - x + c$
- $\int d(t^2 + t) = t^2 + t + c$
- $\int d(u^3) = u^3 + c$

ÖRNEK 9.

$f(x) = \int d(x^3 - x^2)$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f'(4) değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = x^3 - x^2 + C$

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$f'(4) = 48 - 8 = 40$

YANINDA BULUNSUN

4. $a \in R$ olmak üzere,

$\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx$ tir.

İntegralde çarpım durumundaki sabit terim integral dışına çıkar.

Örnek:

- $\int 3xdx = 3\int xdx$
- $\int 5dx = 5\int dx$
- $\int 3x^3dx = 3\int x^3dx$

YANINDA BULUNSUN

5. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

İntegralin toplama ve çıkarma üzerinde dağılma özelliği vardır.

* İntegralin çarpma ve bölme üzerinde dağılma özelliği yoktur.

ÖRNEK 10.

$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int x^2dx - \int 2xdx\right)$

olduğuna göre, f'(3) değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\int (x^2 - 2x)\,dx\right)$

$f(x) = x^2 - 2x$

$f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow f'(3) = 2.3 - 2$

$f'(3) = 4$

9. 40	10. 4

ACİL MATEMATİK

NOT

Şimdi de verilen bir eşitlikte eşitliğin iki tarafının türevi alınarak çözülebilen sorulara örnekler verelim.

ÖRNEK 11.

$$\int x^2 \cdot f(x)\,dx = x^4 + 4x^3$$

olduğuna göre, f(1) değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

Her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\left(\int x^2 \cdot f(x)\,dx\right)' = (x^4 + 4x^3)'$$

$$x^2 \cdot f(x) = 4x^3 + 12x^2$$

Her iki taraf x^2 ile bölünürse,

$f(x) = 4x + 12$

$f(1) = 4 \cdot 1 + 12 = 16$ bulunur.

ÖRNEK 12.

P(x) bir polinomdur.

$$\left(\int \frac{P(x+2)}{x+3}dx\right)' = (2x^2 - 5x + c)'$$

olduğuna göre, P(x) polinomunun sabit terimi kaçtır?

ÇÖZÜM

$\frac{P(x+2)}{x+3} = 4x - 5$

$x = -2$ için

$\frac{P(0)}{1} = -13 \Rightarrow P(0) = -13$

ÖRNEK 13.

$$\left(\int \frac{f(x)}{x}dx\right)' = (x^2 - 6x + 2)'$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, f fonksiyonunun ekstremum noktasının apsisi kaçtır?

ÇÖZÜM

$\frac{f(x)}{x} = 2x - 6 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 6x$

$f'(x) = 4x - 6 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

ÖRNEK 14.

$$(f(x))' = \left(\int (2^x \cdot x + 1)\,dx\right)'$$

fonksiyonunun x = 1 noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2^x \cdot x + 1$

$f'(1) = 2 + 1$

$f'(1) = 3$

12. –13	13. $\frac{3}{2}$	14. 3

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

İntegral Alma Kuralları

1. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int a\,dx = ax + c$$

2. $n \neq -1$ bir rasyonel sayı olmak üzere,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ dir.}$$

Örnek:

- $\int 2dx = 2x + c$
- $\int 3dt = 3t + c$
- $\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{x^5}{5} + c$
- $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = \frac{-1}{4x^4} + c$
- $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c$
$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + c$$
- $\int (x^4 - 2x^2 + x^{-2} + 1)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} + x + c$
$$= \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - \frac{1}{x} + x + c$$
- $\int x \cdot (x-1)^2 dx = \int x \cdot (x^2 - 2x + 1)\,dx$
$$= \int (x^3 - 2x^2 + x)\,dx$$
$$= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$
- $\int \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx = \int \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} dx$
$$= \int (x - 1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + c$$

ÖRNEK 15.

$\int f'(x) = \int 2x + 6$ ve $f(1) = 10$ olduğuna göre, $f(3)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 + 6x + c$

$f(1) = 10 \Rightarrow 7 + c = 10$

$c = 3$

$f(3) = 3^2 + 18 + 3 = 30$

ÖRNEK 16.

$f(x)$ fonksiyonu $A(1, 3)$ noktasından geçiyor.

$\int f'(x) = \int 4x - 3$ olduğuna göre, $f(-2)$ kaçtır?

ÇÖZÜM

$f(x) = 2x^2 - 3x + c$

$A(1,3) \Rightarrow 2 - 3 + c = 3$

$c = 4$

$f(-2) = 8 + 6 + 4 = 18$

ÖRNEK 17.

$y = f(x)$ fonksiyonu için,

$\int f''(x) = \int 12x + 6$

$f'(1) = -5$

$f(0) = 2$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, $f(-1)$ değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 6x^2 + 6x + c$

$f'(1) = -5 \Rightarrow 6 + 6 + c = -5 \Rightarrow c = -17$

$\int f'(x) = \int 6x^2 + 6x - 17 \Rightarrow f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + C$

$f(0) = 2 \Rightarrow C = 2$

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 17x + 2$

$f(-1) = -2 + 3 + 17 + 2 = 20$

15. 30	16. 18	17. 20

AÇILMATEMATİK

ÖRNEK 18.

$$\int \frac{d(x^2+x)}{x^3}$$

ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int \frac{2x+1}{x^3}dx = \int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$$

$$= \frac{2\cdot x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-2}}{-2}+c$$

$$= \frac{-2}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

ÖRNEK 19.

P(x) bir polinomdur.

$der[P'(x)] = 4 \Rightarrow der[P(x)] = 5$

olduğuna göre,

$Q(x) = \int P^3(x)\,dx$

polinomunun derecesi kaçtır?

ÇÖZÜM

$der[P^3(x)] = 15$

$der[Q(x)] = 16$

ÖRNEK 20.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = \int (2x-8)\,dx$

fonksiyonunun yerel minimum değeri 4 olduğuna göre, f(0) kaçtır?

ÇÖZÜM

$f'(x) = 2x-8 = 0 \Rightarrow x = 4$

$(4,4) \rightarrow$ min. nokta

$f(x) = x^2-8x+c \qquad 16-32+c = 4 \qquad c = 20$

$f(x) = x^2-8x+20 \Rightarrow f(0) = 20$

ÖRNEK 21.

$$\int\left(\frac{2x^3+x^2\cdot\sqrt{x}+1}{x^2}\right)dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int\left(2x+\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(2x+x^{\frac{1}{2}}+x^{-2}\right)dx$$

$$2\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^{-1}}{-1}+c$$

$$x^2+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{x}+c$$

ÖRNEK 22.

P(x) bir polinom olmak üzere,

$P(x)+\int P(x)\,dx = x^2+3x+5$

olduğuna göre, P(1) kaçtır?

ÇÖZÜM

$P(x) = ax+b$

$ax+b+\int(ax+b)\,dx = x^2+3x+5$

$ax+b+\frac{ax^2}{2}+bx+c = x^2+3x+5$

$\frac{a}{2}x^2+(a+b)x+b+c = x^2+3x+5$

$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$

$a+b = 3 \rightarrow b = 1$

$P(x) = 2x+1 \Rightarrow P(1) = 3$

18. $\frac{-2}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$	19. 16	20. 20	21. $x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{x}+c$	22. 3

AÇIL MATEMATİK

1. I. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ ✓

II. $\int d(f(x)) = f(x)$ –

III. $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$ ✓

ifadelerinden hangileri doğrudur?

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) I ve III E) I, II ve III

$\int d(f(x)) = f(x) + C$

2. $\int (2x^3 - 5)dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^4}{4} - 5x + c$ B) $\frac{x^4}{2} - 5x + c$ C) $\frac{x^4}{2} - 10x + c$

D) $\frac{x^3}{3} - 5x + c$ E) $\frac{x^3}{6} - 5x + c$

$2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5x + C$

$\frac{x^4}{2} - 5x + C$

3. $f(x) = \int (3x^2 - 8x + 2)dx$

$f(1) = 4$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, f(–1) kaçtır?

A) –6 B) –4 C) –2 D) –1 E) 2

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + C$

$f(1) = 4 \Rightarrow 1 - 4 + 2 + C = 4$

$C = 5$

$f(-1) = -1 - 4 - 2 + 5$

$f(-1) = -2$

4. $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1}dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^2}{2} + x + c$ B) $\frac{x^2}{2} - x + c$ C) $2x^2 + x + c$

D) $2x^2 - x + c$ E) $x^2 + \frac{x}{2} + c$

$\int \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)}dx = \int (x+1)dx$

$= \frac{x^2}{2} + x + C$

5. $\left(\int [x \cdot f(x)]dx\right)' = (x^4 - 2x^2 + 5)'$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, f'(1) kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 12 E) 24

$x \cdot f(x) = 4x^3 - 4x$

$f(x) = 4x^2 - 4$

$f'(x) = 8x \Rightarrow f'(1) = 8$

6. $\left(\int f(3x+1)dx\right)' = (2x^3 + x + 3)'$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, y = f(x) fonksiyonunun grafiğine x = –2 apsisli noktasından çizilen teğetin eğimi kaçtır?

A) –4 B) –2 C) –1 D) 2 E) 4

$f(3x+1) = 6x^2 + 1$

$3 \cdot f'(3x+1) = 12x$

$x = -1$ için $3 \cdot f'(-2) = -12$

$f'(-2) = -4$

AÇIL MATEMATİK

7. $\int \frac{x^2-3}{x^2}dx$

integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x-\frac{3}{x}+c$ B) $x+\frac{3}{x}+c$ C) $\frac{1}{x}-x+c$

D) $\frac{1}{x^2}-x^2+c$ E) $2x+\frac{3}{x}+c$

$\int (1-3.x^{-2})dx = x-\frac{3.x^{-1}}{-1}+c$

$= x+\frac{3}{x}+c$

8. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\sqrt{x}-x+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^5}+c$ B) $\sqrt{x}+2x+\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{x}+c$

C) $2\sqrt{x}-2x+\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{x}+c$ D) $2\sqrt{x}+2x+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+c$

E) $\sqrt{x}-2x+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+c$

$\int \frac{1+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2+\sqrt{x}\right)dx$

$2\sqrt{x}+2x+\frac{2}{3}x^{3/2}+c$

9. $f(x)=\int \frac{x}{x^2+1}dx$

eşitliği veriliyor.

Buna göre,

$\int\left(\frac{x^2+3x+1}{x^2+1}\right)dx = \int\left(\frac{1}{x^2+1}+\frac{3x}{x^2+1}\right)dx$

integralinin f(x) cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) f(x) + x + c B) 2f(x) + x + c C) f(x) + 3x + c

D) 3f(x) + x + c E) 3f(x) + 2x + c

$\int 1.dx + 3.\int \frac{x}{x^2+1}dx$

$x+3.f(x)+c$

10. y = f(x) fonksiyonunun A(–1, 2) noktasındaki teğetinin eğimi 1 ve $f''(x) = 2$ dir.

Buna göre, f(1) kaçtır?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

$f'(x)=2x+c$

$f'(-1)=1 \Rightarrow -2+c=1 \Rightarrow c=3$

$f(x)=x^2+3x+C$

$A(-1,2) \Rightarrow 1-3+C=2 \Rightarrow C=4$

$f(1)=1+3+4=8$

11. $\left(\int [x\cdot f'(x)]dx\right)' = (2x^3+x^2+1)'$

eşitliği veriliyor.

f(1) = 6 olduğuna göre, f(0) kaçtır?

A) –3 B) –2 C) 1 D) 2 E) 4

$x.f'(x)=6x^2+2x$

$\int f'(x)=\int 6x+2 \Rightarrow f(x)=3x^2+2x+C$

$f(1)=6 \Rightarrow 3+2+C=6 \Rightarrow C=1$

$f(x)=3x^2+2x+1$

$f(0)=1$

12. $\int \frac{d(x^3-x^2)}{x}$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) x^2-x+c B) $3x^2-2x+c$ C) $\frac{3x^2}{2}-x+c$

D) $\frac{3x^2}{2}-2x+c$ E) $x^2-\frac{x}{2}+c$

$\int \frac{3x^2-2x}{x}dx = \int(3x-2)dx$

$= \frac{3x^2}{2}-2x+C$

AÇIL MATEMATİK

13. $\int\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}\right)dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{x^2}{2}+x+c$ B) $\frac{x^2}{3}+2x+c$ C) $\frac{x^3}{3}+x+c$

D) $\frac{x^3}{3}-x+c$ E) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c$

$\int\frac{(x^2+1)\cdot(x+1)}{x+1}dx=\int(x^2+1)dx$

$=\frac{x^3}{3}+x+c$

14. P(x) bir polinom olmak üzere,

$P(x)=\int(2x-6)dx$

polinomunun $P'(x)$ polinomuna bölümünden kalan 4'tür.

Buna göre, P(1) kaçtır?

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

$P(x)=x^2-6x+c$

$P'(x)=2x-6$

$2x-6=0\Rightarrow x=3$

$P(3)=9-18+c=4\Rightarrow c=13$

$P(x)=x^2-6x+13$

$P(1)=1-6+13=8$

15. P(x) bir polinomdur.

$Q(x)=\int x\cdot P^2(x)dx$

polinomunun derecesi 12'dir.

Buna göre, P'(x) polinomunun derecesi kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

$der[P(x)]=5$

$der[P'(x)]=4$

16. $\frac{d}{dx}\int\frac{d(3x^2+1)}{x}$

ifadesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) 6 B) 6x C) 6x + c D) $3x^2$ E) $3x^2+c$

$\frac{d}{dx}\int\frac{6x\,dx}{x}=\frac{d}{dx}\int 6\,dx$

$=6$

1. D	2. B	3. C	4. A	5. C	6. A	7. B	8. D
9. D	10. D	11. C	12. D	13. C	14. D	15. C	16. A

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

Belirsiz İntegral Alma Teknikleri

Bazı fonksiyonların belirsiz integrali temel integral alma formülleri ile hesaplanamaz. Bu durumda fonksiyonların integralini almak için integral alma metotları geliştirilmiştir.

Değişken Değiştirme Tekniği

İntegrali alınacak ifadedeki çarpanlar birbirinin türevi oluyorsa çarpanların birine u denir. Sonra du diferansiyeli alınarak fonksiyon, integrali alınabilecek duruma getirilir. Daha sonra eski değişkene dönülür.

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$ integralinde

$u = g(x)$ dönüşümü yapılırsa $du = g'(x)dx$ olur.

İntegral $\int f(u)du$ biçimine dönüştürülür.

ÖRNEK 1.

$$\int x \cdot (x^2+2)^3 dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = x^2+2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$\int u^3 \frac{du}{2} = \frac{u^4}{8} + c$$

$$= \frac{(x^2+2)^4}{8} + c$$

ÖRNEK 2.

$$\int f^2(x) \cdot f'(x)dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\,dx$

$$\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c$$

$$= \frac{f^3(x)}{3} + c$$

ÖRNEK 3.

$$\int (3x+1)^5 dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = 3x+1 \Rightarrow du = 3\,dx$

$$\int u^5 \frac{du}{3} = \frac{u^6}{18} + c$$

$$= \frac{(3x+1)^6}{18} + c$$

ÖRNEK 4.

$$\int (x^2-x)^5 \cdot (6x-3)dx$$

$3 \cdot (2x-1)\,dx$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = x^2-x \Rightarrow du = (2x-1)\,dx$

$$\int u^5 \cdot 3\,du = \frac{u^6}{2} + c$$

$$= \frac{(x^2-x)^6}{2} + c$$

ÖRNEK 5.

$$\int \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{-1}{x^2}\,dx$

$$\int f'(u) \cdot -du = -f(u) + c$$

$$= -f\left(\frac{1}{x}\right) + c$$

1. $\frac{(x^2+2)^4}{8} + c$	2. $\frac{f^3(x)}{3} + c$	3. $\frac{(3x+1)^6}{18} + c$
4. $\frac{(x^2-x)^6}{2} + c$	5. $-f\left(\frac{1}{x}\right) + c$	

ÖRNEK 6.

a ve b birer reel sayı olmak üzere,

$$\int \frac{f'(x)}{f^3(x)}dx = a \cdot f^b(x) + c$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, a – b farkı kaçtır?

ÇÖZÜM

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\,dx$

$$\int u^{-3}\,du = \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2}\cdot(f(x))^{-2} + C$$

$$\left.\begin{matrix} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a - b = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

ÖRNEK 7.

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u^2 = 2x+3 \Rightarrow 2u\cdot du = 2\,dx$

$$\int u\cdot u\,du = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{3} + C$$

ÖRNEK 8.

$$\int \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\int f'(u)\,2\,du = 2\cdot f(u) + C = 2\cdot f(\sqrt{x}) + C$$

ÖRNEK 9.

$$\int x^2 \cdot \sqrt{x^3+5}\,dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u^2 = x^3+5 \Rightarrow 2u\cdot du = 3x^2\cdot dx$

$$\int u\cdot\frac{2u}{3}\,du = \frac{2}{3}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+5)^3} + C$$

ÖRNEK 10.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+6}}dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u^2 = x^2+2x+6 \Rightarrow 2u\cdot du = (2x+2)\cdot dx$

$u\cdot du = (x+1)\cdot dx$

$$\int \frac{u}{u}\,du = \int du = u + C = \sqrt{x^2+2x+6} + C$$

ÖRNEK 11.

a bir reel sayı olmak üzere,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}} = a\cdot(x-4)\cdot\sqrt{x+2} + c$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM

$u^2 = x+2 \Rightarrow 2u\,du = dx$

$$\int \frac{u^2-2}{u}\cdot 2u\,du = \frac{2u^3}{3} - 4u + C$$

$$\frac{2}{3}\cdot(x+2)\sqrt{x+2} - 4\cdot\sqrt{x+2} + C$$

$$\left(\frac{2x}{3} + \frac{4}{3} - 4\right)\cdot\sqrt{x+2} + C = \frac{2}{3}(x-4)\cdot\sqrt{x+2} + C$$

$a = 2/3$

6. $\frac{3}{2}$	7. $\frac{\sqrt{(2x+3)^3}}{3} + c$	8. $2\cdot f(\sqrt{x}) + c$
9. $\frac{2}{9}\sqrt{(x^3+5)^3} + c$	10. $\sqrt{x^2+2x+6} + c$	11. $\frac{2}{3}$

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 12.

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{2-\sqrt{x}}dx$$

integralinde $x = u^2$ dönüşümü yapılırsa oluşacak yeni integrali bulunuz.

ÇÖZÜM

$x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$$\int \frac{u+1}{2-u}\cdot 2u\,du = 2\cdot\int \frac{u^2+u}{2-u}\,du$$

ÖRNEK 13.

$$\int\left(\frac{(x-2)\sqrt{x+1}}{2}\right)dx$$

integralinde $\sqrt{x+1} = u$ dönüşümü yapıldığında oluşan integrali bulunuz.

ÇÖZÜM

$x+1 = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du$

$$\int \frac{(u^2-3).u}{2}\cdot 2u\,du$$

$$\int (u^4-3u^2)\,du$$

ÖRNEK 14.

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}-x}{\sqrt[3]{x}}dx$$

integrali için $x = u^{12}$ dönüşümü yapılırsa oluşan yeni integrali bulunuz.

ÇÖZÜM

$x = u^{12} \Rightarrow dx = 12u^{11}\,du$

$$\int \frac{u^3-u^{12}}{u^4}\cdot 12u^{11}\,du$$

$$12\cdot\int (u^{10}-u^{19})\,du$$

ÖRNEK 15.

$$\int (x+1)^4(x-2)dx$$

integralinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$u = x+1 \Rightarrow du = dx$

$$\int u^4.(u-3)\,du = \int (u^5-3u^4)\,du$$

$$= \frac{u^6}{6} - \frac{3u^5}{5} + C$$

$$= \frac{(x+1)^6}{6} - \frac{3.(x+1)^5}{5} + C$$

12. $2\cdot\int\left(\frac{u^2+u}{2-u}\right)du$	13. $\int (u^4-3u^2)du$
14. $12\cdot\int (u^{10}-u^{19})du$	15. $\frac{(x+1)^6}{6} - \frac{3\cdot(x+1)^5}{5} + c$

AÇIL MATEMATİK

1. $\int x \cdot (x^2+1)^6 dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{(x^2+1)^6}{12}+c$ B) $\frac{(x^2+1)^7}{14}+c$ C) $\frac{(x^2+1)^7}{12}+c$

D) $\frac{(x^2+1)^7}{7}+c$ E) $\frac{2}{7}(x^2+1)^7+c$

$u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$\int u^6 \frac{du}{2} = \frac{u^7}{14}+c$

$= \frac{(x^2+1)^7}{14}+c$

2. $\int f^4(x) \cdot f'(x) dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{f^4(x)}{4}+c$ B) $\frac{f^5(x)}{5}+c$ C) $\frac{f^3(x)}{12}+c$

D) $\frac{f^4(x)}{12}+c$ E) $\frac{f^5(x)}{4}+c$

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\,dx$

$\int u^4 du = \frac{u^5}{5}+c$

$= \frac{f^5(x)}{5}+c$

3. $\int (x + \sqrt[3]{x}) dx$

integraline $x = u^3$ dönüşümü uygulandığında oluşan yeni integral aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\frac{1}{3}\int (u^5+u^2) du$ B) $3\int (u^5+u) du$

C) $3\int (u^6+u^3) du$ D) $\frac{1}{3}\int (u^5+u^3) du$

E) $3\int (u^5+u^3) du$

$x = u^3 \Rightarrow dx = 3u^2 du$

$\int (u^3+u) \cdot 3u^2 du = 3\int (u^5+u^3) du$

4. $\int g'(f(x)) \cdot f'(x) dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(g \circ f)(x) + c$ B) $(f \circ g)(x) + c$ C) $f^2(g(x)) + c$

D) $g^2(f(x)) + c$ E) $(f \cdot g)(x) + c$

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\,dx$

$\int g'(u) du = g(u)+c$

$= g(f(x))+c$

$= (g \circ f)(x)+c$

5. $\int \frac{dx}{(x^2+6x+9)}$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{-1}{x+3}+c$ B) $\frac{1}{x+3}+c$ C) $\frac{-1}{(x+3)^3}+c$

D) $\frac{1}{2x+6}+c$ E) $-(x+3)^2+c$

$\int \frac{1}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{1}{(x+3)^2} dx = \int (x+3)^{-2} dx$

$u = x+3 \Rightarrow du = dx$

$\int u^{-2} du = \frac{u^{-1}}{-1}+c = \frac{-1}{x+3}+c$

6. $\int f''(f(x)) \cdot f'(x) dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(f(x)) + c$ B) $f^2(x) + c$ C) $f(f'(x)) + c$

D) $f'(x) + c$ E) $f'(f(x)) + c$

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$

$\int f''(u) du = f'(u)+c$

$= f'(f(x))+c$

7. $f(x) = \int x \cdot \sqrt{1+x^2} dx$

fonksiyonu veriliyor.

$u^2 = 1+x^2$

$2u\,du = 2x\,dx$

$u\,du = x\,dx$

$f(\sqrt{3}) = 3$ olduğuna göre, $f(0)$ kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 1 E) $\frac{4}{3}$

$f(x) = \int u \cdot u\,du = \int u^2 du = \frac{u^3}{3}+c$

$f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+c$ $\quad f(\sqrt{3}) = 3 \Rightarrow c = \frac{1}{3}$

$f(0) = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

AÇIL MATEMATİK

8. $\int x \cdot f''(x^2)\,dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{f(x^2)}{2}+c$ B) $\frac{f'(x^2)}{2}+c$ C) $2\cdot f'(x)+c$

D) $2\cdot f'(x^2)+c$ E) $f'(x^2)+c$

$u=x^2 \Rightarrow du=2x\,dx$

$\int f''(u)\frac{du}{2}=\frac{f'(u)}{2}+c$

$=\frac{f'(x^2)}{2}+c$

9. $\int \frac{dx}{x^2\left(2+\frac{1}{x}\right)^3}$ $-du$

integralinde $2+\frac{1}{x}=u$ dönüşümü yapılırsa oluşan yeni integral aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\int \frac{1}{u^2}du$ B) $\int \frac{1}{u^3}du$ C) $\int \frac{-1}{u^2}du$

D) $\int \frac{-1}{u^3}du$ E) $\int \frac{1}{(1+u)^2}du$

$u=2+\frac{1}{x} \Rightarrow du=-\frac{1}{x^2}dx$

$\int \frac{1}{u^3}\cdot -du=\int \frac{-1}{u^3}du$

10. a ve b birer reel sayı olmak üzere,

$\int x\cdot\sqrt{x-1}\,dx = a\sqrt{(x-1)^5}+b\sqrt{(x-1)^3}+c$

eşitliği veriliyor. $u^2=x-1 \Rightarrow 2u\,du=dx$

Buna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) 1 D) $\frac{9}{8}$ E) $\frac{16}{15}$

$\int (u^2+1)\cdot u\,2u\,du=\int(2u^4+2u^2)du$

$2\cdot\frac{u^5}{5}+2\cdot\frac{u^3}{3}+c$

$a=\frac{2}{5},\ b=\frac{2}{3} \Rightarrow a+b=\frac{2}{5}+\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$

11. $\int f'(2x)\,dx = x^2-2x$

eşitliği veriliyor.

f(2) = 4 olduğuna göre, f(0) kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

$u=2x \Rightarrow du=2dx$

$\int f'(u)\cdot\frac{du}{2}=\frac{f(u)}{2}+c=x^2-2x$

$\frac{f(2x)}{2}+c=x^2-2x$

$x=1$ için $\frac{4}{2}+c=-1$, $c=-3$ $\quad x=0$ için $\frac{f(0)}{2}-3=0$

$f(0)=6$

12. $f'(x) = 3f(x)$

olduğuna göre,

$\int f^3(x)\,dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{f^2(x)}{2}+c$ B) $\frac{f^2(x)}{6}+c$ C) $\frac{f^3(x)}{3}+c$

D) $\frac{f^3(x)}{6}+x$ E) $\frac{f^3(x)}{9}+c$

$\int f^2(x)\cdot\underbrace{f(x)}_{\frac{f'(x)}{3}}dx=\int\frac{u^2}{3}du=\frac{u^3}{9}+c$

$=\frac{f^3(x)}{9}+c$

$u=f(x) \Rightarrow du=f'(x)\,dx$

13. $\int \frac{2x}{x^4+2x^2+1}dx = \int\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$

integralinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) $2\cdot(x^2+1)+c$ B) $\frac{x^2+1}{2}+c$ C) $\frac{(x^2+1)^2}{2}+c$

D) $\frac{-1}{x^2+1}+c$ E) $\frac{-2}{x^2+1}+c$

$u=x^2+1 \Rightarrow du=2x\,dx$

$\int\frac{du}{u^2}=\int u^{-2}du=\frac{-1}{u}+c=\frac{-1}{x^2+1}+c$

1. B	2. B	3. E	4. A	5. A	6. E	7. C
8. B	9. D	10. E	11. C	12. E	13. D	

YANINDA BULUNSUN

İntegral Hesabının Temel Teoremi

f : [a, b] → ℝ fonksiyonu, [a, b] aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. F : [a, b] → ℝ fonksiyonu, (a, b) aralığında türevli ve ∀x ∈ (a, b) için,

$$F'(x) = f(x) \text{ ise } \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ dır.}$$

Bu ifadeye **"f(x) in Belirli İntegrali"** denir.

ÖRNEK 1.

$$\int_0^3 (4x - 1)\,dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$(2x^2 - x)\Big|_0^3 = 15 - 0 = 15$

NOT

$F'(x) = f(x)$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + c]\Big|_a^b$$

$$= (F(b) + c) - (F(a) + c)$$

$$= F(b) + \not{c} - F(a) - \not{c}$$

$$= F(b) - F(a)$$

Belirli integralde c sabiti daima sadeleşeceği için çözümde yazılmaz.

ÖRNEK 2.

$$\int_{-1}^{1} (3x^2 - 2x - 5)\,dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$(x^3 - x^2 - 5x)\Big|_{-1}^{1} = (-5) - (3)$

$= -8$

ÖRNEK 3.

$$\int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_0^8 x^{-2/3}dx = \frac{x^{1/3}}{1/3}\Big|_0^8 = 3(2^3)^{1/3} - 0$

$= 3 \cdot 2$

$= 6$

ÖRNEK 4.

$$\int_{-2}^{3} (4x - a)\,dx = -5$$

olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM

$(2x^2 - ax)\Big|_{-2}^{3} = -5$

$(18 - 3a) - (8 + 2a) = -5$

$10 - 5a = -5 \Rightarrow 5a = 15$

$a = 3$

1. 15	2. –8	3. 6	4. 3

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 5.

$$\int_b^a 2dx = 6$$

$$\int_b^a 2xdx = 24$$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$2x\Big|_b^a = 2a-2b=6 \Rightarrow a-b=3$

$x^2\Big|_b^a = 24 \Rightarrow a^2-b^2=24$

$(a-b)\cdot(a+b)=24 \Rightarrow a+b=8$

3

ÖRNEK 6.

$$\int_{-2}^{2} d(x^3 - x^2 - 2x)$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$(x^3-x^2-2x)\Big|_{-2}^{2} = 0-(-8)$

$= 8$

ÖRNEK 7.

$$\int_{-1}^{5} \frac{d(x^2-1)}{x}$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_{-1}^{5} \frac{2x\,dx}{x} = \int_{-1}^{5} 2.dx = 2x\Big|_{-1}^{5} = 10-(-2)$

$= 12$

ÖRNEK 8.

$$\int_1^4 4^{\log_{16} x} dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

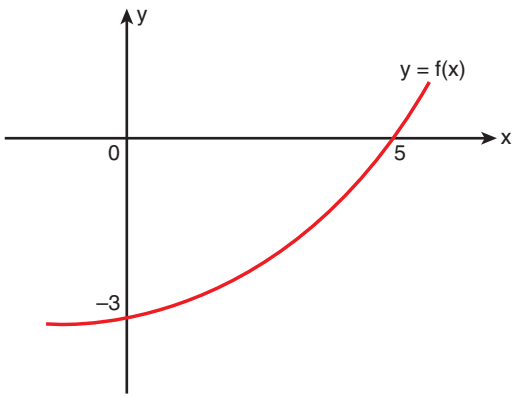
$\int_1^4 4^{\log_4 \sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4$

$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3}$

$= \frac{14}{3}$

ÖRNEK 9.

Aşağıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\int_0^5 f'(x)\,dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_0^5 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^5 = f(5)-f(0)$

$= 0-(-3)$

$= 3$

5. 8	6. 8	7. 12	8. $\frac{14}{3}$	9. 3

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 10.

$f(2x) = x^2 + 4x + 7$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\int_{-3}^{5} f'(4)\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$2 \cdot f'(2x) = 2x+4 \Rightarrow f'(2x) = x+2$

$x=2$ için $f'(4) = 4$

$$\int_{-3}^{5} 4\,dx = 4x\Big|_{-3}^{5} = 20-(-12) = 32$$

YANINDA BULUNSUN

Belirli İntegralin Özellikleri

f ve g [a, b] aralığında integrallenebilir iki fonksiyon ve a, b, c ∈ ℝ ise,

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$
3. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$
4. $\int_a^b [f(x) \mp g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$
5. a < b < c olmak üzere,
$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$
6. f(x) tek fonksiyon ise [f(–x) = –f(x)]
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$
7. f(x) çift fonksiyon ise [f(x) = f(–x)]
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx = 2\int_{-a}^{0} f(x)dx$$
8. $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = 0$

Şimdi bu özellikleri tek tek inceleyelim.

YANINDA BULUNSUN - 1

a, b ∈ ℝ olmak üzere,

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \text{ tir.}$$

İspat : $\int_b^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_b^a = F(a) - F(b)$

$$= -(F(b) - F(a))$$

$$= -\int_a^b f(x)\,dx$$

ÖRNEK 11.

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 4$$

olduğuna göre, $\int_5^1 f(x)\,dx$ **kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$\int_5^1 f(x)\,dx = -\int_1^5 f(x)\,dx$$

$$\int_5^1 f(x)\,dx = -4$$

YANINDA BULUNSUN - 2

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0$$

10. 32	11. –4

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 12.

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre,

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{x+3}{x^2+2x} \right) dx$$

integralinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$4x^2-4x+1=0 \Rightarrow (2x-1)^2=0$

$x_1=x_2=1/2$

$$\int_{1/2}^{1/2} \frac{x+3}{x^2+2x}\,dx = 0$$

YANINDA BULUNSUN - 3

a, b, k $\in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx \text{ tir.}$$

ÖRNEK 13.

a $\in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int_0^1 (ax^2 - ax)\,dx = -2$$

olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\left(a\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right)\Big|_0^1 = -2$$

$$\frac{a}{3} - \frac{a}{2} = -2$$

$$-\frac{a}{6} = -2 \Rightarrow a = 12$$

YANINDA BULUNSUN - 4

a, b $\in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \text{ ve}$$

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \text{ tir.}$$

ÖRNEK 14.

$$\int_2^4 [2x + 4f(x)]dx = 20$$

olduğuna göre, $\int_4^2 f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$x^2\Big|_2^4 + 4\cdot\int_2^4 f(x)\,dx = 20 \Rightarrow \int_2^4 f(x)dx = 2$

12

$$\int_4^2 f(x)\,dx = -\int_2^4 f(x)\,dx = -2$$

ÖRNEK 15.

$$\int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx = 20$$

$$+\quad \int_0^4 (g(x) + f(x))\,dx = 10$$

olduğuna göre, $\int_0^4 f(x)dx$ **integralinin değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$2\cdot\int_0^4 f(x)\,dx = 30$$

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 15$$

12. 0	13. 12	14. –2	15. 15

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 16.

$$\int_1^2 (\sin^2 x + 2)\,dx + \int_1^2 \cos^2 x\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_1^2 (\sin^2 x + \cos^2 x + 2)\,dx = \int_1^2 3\,dx = 3x\Big|_1^2$$

$$= 6 - 3$$

$$= 3$$

ÖRNEK 17.

$$\int_{-1}^{6} \frac{x}{x+1}\,dx = A$$

olmak üzere, $\int_{-1}^{6} \frac{1}{x+1}\,dx$ **integralinin A cinsinden eşiti nedir?**

ÇÖZÜM

$$A + B = \int_{-1}^{6} \frac{x+1}{x+1}\,dx = \int_{-1}^{6} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{6} = 7$$

$$A + B = 7 \Rightarrow B = 7 - A$$

YANINDA BULUNSUN - 5

$F'(x) = f(x)$ ve $a < b < c$ olmak üzere, $(a, b, c \in \mathbb{R})$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \text{ tir.}$$

İspat :

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^c = F(c) - F(a)$$

$$= F(c) - F(b) + F(b) - F(a)$$

$$= \int_b^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 18.

$$\int_{-2}^{0} 3x^2\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx + \int_1^3 3x^2\,dx$$

ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$\int_{-2}^{3} 3x^2\,dx = x^3\Big|_{-2}^{3} = 27 - (-8)$$

$$= 35$$

ÖRNEK 19.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = 3 \text{ ve}$$

$$\int_2^5 f(x)\,dx = -9$$

olduğuna göre, $\int_5^0 f(x)\,dx$ **integralinin değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$$\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx = 3 + (-9)$$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = -6 \Rightarrow \int_5^0 f(x)\,dx = 6$$

ÖRNEK 20.

Her $n \in \mathbb{Z}$ için,

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = 2n$$

olarak veriliyor.

Buna göre, $\int_1^4 f(x)\,dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

ÇÖZÜM

$n=1$ $\int_1^2 f(x)\,dx = 2$

$n=2$ $\int_2^3 f(x)\,dx = 4$

$n=3$ $\int_3^4 f(x)\,dx = 6$

Toplanırsa $\int_1^4 f(x)\,dx = 12$

16. 3	17. 7 – A	18. 35	19. 6	20. 12

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN - 6

f(x) tek fonksiyon ise [f(–x) = –f(x)]

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \text{ dır.}$$

İspat : $F'(x) = f(x)$ olmak üzere,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{-a}^{a} = F(a) - F(-a) \text{ olur.}$$

f tek fonksiyon olduğundan F çift fonksiyon olur.

F çift fonksiyon ise

$F(a) = F(-a)$ dır.

O halde,

$F(a) - F(-a) = 0$ olur.

ÖRNEK 21.

$$\int_{-2}^{2} (5x^3 - 3x)\,dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_{-2}^{2} (5x^3 - 3x)\,dx = 0$

Tek Fonksiyon

ÖRNEK 22.

$$\int_{-3}^{3} (x^7 - 2x^5 + x^3 - 2)\,dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_{-3}^{3} (x^7 - 2x^5 + x^3)\,dx - \int_{-3}^{3} 2\,dx$

Tek Fonksiyon

$0 - 2x\Big|_{-3}^{3} = -6 - (6) = -12$

ÖRNEK 23.

f, tek fonksiyon olmak üzere,

$$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = 6 \text{ dır.}$$

$\int_{-3}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

Buna göre,

$$\int_{0}^{3} (1 + f(x))\,dx$$

$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = -6$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_{0}^{3} 1\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx = x\Big|_{0}^{3} - 6$

$= 3 - 6$

$= -3$

YANINDA BULUNSUN - 7

f(x) çift fonksiyon ise [f(–x) = f(x)]

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{-a}^{0} f(x)\,dx \text{ tir.}$$

ÖRNEK 24.

Her $x \in \mathbb{R}$ için, f(–x) = f(x) olmak üzere,

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 4$$

Buna göre, $\int_{-2}^{2} [f(x) + 5]\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$2 \cdot \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{2} 5\,dx$

$2 \cdot 4 + 5x\Big|_{-2}^{2} = 8 + 10 - (-10)$

$= 28$

21. 0	22. –12	23. –3	24. 28

YANINDA BULUNSUN - 8

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right] = 0 \text{ dır.}$$

$\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ ve sabit bir sayının türevi sıfır olduğundan,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right] = 0 \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK 25.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{-2}^{8} (x+1)^2 \cdot (x-2)^3\,dx\right)$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\frac{d}{dx}\left(\int_{-2}^{8} (x+1)^2\cdot(x-2)^3\,dx\right) = 0$

Sabit sayı

YANINDA BULUNSUN

Belirli İntegralde Değişken Değiştirme Yöntemi

Belirsiz integralde değişken değiştirme yöntemine ek olarak, burada alt ve üst sınırların yeni değişkene göre düzenlenmesi gerekecektir.

ÖRNEK 26.

$$\int_0^1 (2x-1)^4\,dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$u = 2x-1 \Rightarrow du = 2\,dx$

$x=0$ için $u=-1$

$x=1$ için $u=1$

$$\int_{-1}^{1} u^4 \frac{du}{2} = \frac{u^5}{10}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

NOT

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(t)\,dt \text{ dir.}$$

ÖRNEK 27.

$$\int_1^9 f(x)\,dx = 8$$

olduğuna göre, $\int_1^3 x\cdot f(x^2)\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

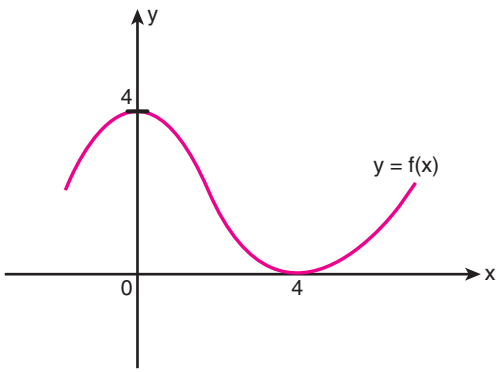
$x=1$ için $u=1$

$x=3$ için $u=9$

$$\int_1^9 f(u)\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_1^9 f(u)\,du = \frac{8}{2} = 4$$

ÖRNEK 28.

Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre, $\int_0^4 f(x)\cdot f'(x)\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\,dx$

$x=0$ için $u=f(0)=4$

$x=4$ için $u=f(4)=0$

$$\int_4^0 u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_4^0 = 0 - \frac{16}{2} = -8$$

25. 0	26. $\frac{1}{5}$	27. 4	28. –8

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 29.

$$\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^4}dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$x=0$ için $u=1$, $x=1$ için $u=2$

$$\int_1^2 \frac{du}{u^4} = \frac{u^{-3}}{-3}\Big|_1^2 = \frac{-1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

ÖRNEK 30.

$$\int_1^8 \frac{1+\sqrt[3]{x}}{x}dx$$

integraline $u = \sqrt[3]{x}$ dönüşümü uygulandığında oluşan yeni integrali bulunuz.

ÇÖZÜM

$x = u^3 \Rightarrow dx = 3u^2\,du$

$x=1$ için $u=1$, $x=8$ için $u=2$

$$\int_1^2 \frac{1+u}{u^3}\cdot 3u^2\,du = 3\cdot\int_1^2 \frac{1+u}{u}\,du$$

ÖRNEK 31.

$$\int_0^2 f(x+1)dx = 6 \Rightarrow \int_1^3 f(x)\,dx = 6$$

eşitliği veriliyor.

Buna göre, $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$x=1$ için $u=1$, $x=9$ için $u=3$

$$\int_1^3 f(u)\cdot 2\,du = 2\cdot\int_1^3 f(u)\,du = 2\cdot 6 = 12$$

YANINDA BULUNSUN

$$\int_a^b f(x-c)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$

ÖRNEK 32.

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx + \int_{-3}^{5} f(x-2)dx = 6$$

olduğuna göre, $\int_{-1}^{2} f(x+1)dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^{2} f(x+1)dx + \int_{-1}^{2} f(x+1)dx = 6$$

$$2\cdot\int_{-1}^{2} f(x+1)dx = 6 \Rightarrow \int_{-1}^{2} f(x+1)dx = 3$$

YANINDA BULUNSUN

Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonların İntegrali

Parçalı fonksiyonların bir aralıkta integrali hesaplanırken alt aralıkların uç noktalarına yani kritik noktalara göre integral parçalanır.

Mutlak değerli fonksiyonların integraline fonksiyonun önce kritik noktalara göre işareti incelenerek parçalı fonksiyona dönüştürülür. Sonra integrali alınır.

g(x) ve h(x) integrallenebilir iki fonksiyon ve $a \le c \le b$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x < c \text{ ise} \\ h(x), & x \ge c \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı f(x) fonksiyonunun [a,b] ndaki integralini bulmak için integral, fonksiyonun kuralının değiştiği c noktasına göre,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c g(x)dx + \int_c^b h(x)dx$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılmalıdır.

29. $\frac{7}{24}$	30. $3\cdot\int_1^2\left(1+\frac{1}{u}\right)du$	31. 12	32. 3

AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 33.

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ 4, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\int_{-2}^{4} f(x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int_{-2}^{1} 2x\,dx + \int_{1}^{4} 4\,dx = x^2\Big|_{-2}^{1} + 4x\Big|_{1}^{4}$$
$$= 1 - 4 + 16 - 4$$
$$= 9$$

ÖRNEK 34.

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x < -2 \\ 1 - 2x, & -2 \leq x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

olduğuna göre, $\int_{-4}^{2} f(x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int_{-4}^{-2} 4x\,dx + \int_{-2}^{0} (1-2x)\,dx + \int_{0}^{2} 1\,dx$$
$$2x^2\Big|_{-4}^{-2} + (x - x^2)\Big|_{-2}^{0} + x\Big|_{0}^{2} = 8 - 32 + 0 - (-6) + 2 - 0$$
$$= -24 + 6 + 2$$
$$= -16$$

ÖRNEK 35.

$$\int_{-2}^{4} |x|dx$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{4} x\,dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{4}$$
$$= 0 + 2 + 8 - 0$$
$$= 10$$

ÖRNEK 36.

$$\int_{1}^{3} \sqrt{x^2 - 4x + 4}\,dx$$

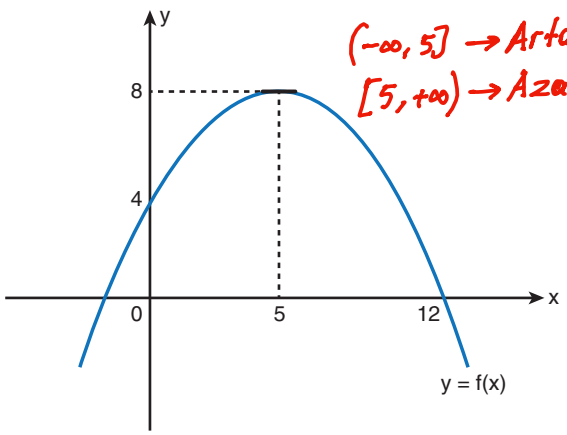
integralinin eşiti kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int_{1}^{3} \sqrt{(x-2)^2}\,dx = \int_{1}^{3} |x-2|\,dx = \int_{1}^{2} (-x+2)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx$$
$$\left(-\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{1}^{2} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{2}^{3} = 2 - \frac{3}{2} + \left(\frac{9}{2} - 6\right) - (2 - 4)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2$$
$$= 1$$

ÖRNEK 37.

Aşağıda y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$(-\infty, 5]$ → Artan
$[5, +\infty)$ → Azalan

Buna göre, $\int_{0}^{12} |f'(x)|dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int_{0}^{5} f'(x)\,dx + \int_{5}^{12} -f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{0}^{5} - f(x)\Big|_{5}^{12}$$
$$= (8 - 4) - (0 - 8)$$
$$= 12$$

ÖRNEK 38.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\int_{-1}^{4} f(x+1)dx$ integralinin değeri kaçtır?

$\int_{0}^{3} f(x).dx$

ÇÖZÜM

$$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 3x^2\,dx + \int_{1}^{3} 2\,dx = x^3\Big|_{0}^{1} + 2x\Big|_{1}^{3}$$
$$= 1 - 0 + 6 - 2$$
$$= 5$$

33. 9	34. –16	35. 10	36. 1	37. 12	38. 5

AÇIL MATEMATİK

1. $\int_{-2}^{6} (2x-5)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) –2 B) –4 C) –6 D) –8 E) –10

$(x^2-5x)\Big|_{-2}^{6} = 6-14=-8$

2. $f(x) = x^2 - ax + a - 3$

fonksiyonu veriliyor.

$\int_{-1}^{1} d(f(x)) = 6$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) –5 B) –4 C) –3 D) –2 E) –1

$f(x)\Big|_{-1}^{1} = f(1)-f(-1)$

$(1-a+a-3)-(1+a+a-3)=6$

$-2-2a+2=6 \Rightarrow a=-3$

3. $\int_{-4}^{1}\left(\int_{0}^{2}(3x^2-2x-4)\,dx\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) –20 B) –18 C) –16 D) –12 E) –8

$(x^3-x^2-4x)\Big|_{0}^{2} = (8-4-8)-(0)=-4$

$\int_{-4}^{1}(-4).dx = -4x\Big|_{-4}^{1} = -4-16=-20$

4. $\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{2}{x}\right)^2 dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{5}{3}$ D) 2 E) $\frac{8}{3}$

$\int_{-1}^{1}(x^2+4+4x^{-2})dx = \left(\frac{x^3}{3}+4x-\frac{4}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}$

$= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}-4+4\right)$

$= \frac{2}{3}$

5. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2-10x$

fonksiyonu veriliyor. $f'(1) = -7$

Buna göre,

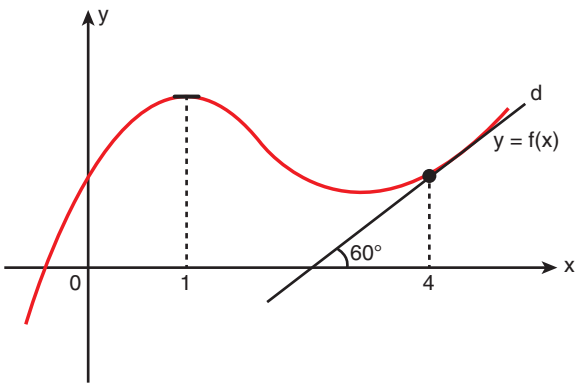
$\int_{-2}^{3} f'(1)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) –40 B) –35 C) –30 D) –25 E) –20

$\int_{-2}^{3} 7\,dx = 7x\Big|_{-2}^{3} = 7.5=35$

6. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği ve x = 4 apsisli noktasındaki teğet doğrusu gösterilmiştir.



Buna göre, $\int_{1}^{4} f''(x)\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B) 1 C) $\sqrt{3}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

$f'(x)\Big|_{1}^{4} = f'(4)-f'(1)$

$= \tan 60° - 0 = \sqrt{3}$

AÇIL MATEMATİK

7. $\int_0^4 \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{-1}{3}$ B) $\frac{-2}{3}$ C) -1 D) $\frac{-4}{3}$ E) $\frac{-5}{3}$

$\int_0^4 \frac{(1-\sqrt{x})\cdot(1+\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}dx = \int_0^4 (1-\sqrt{x})dx$

$(x-\frac{2}{3}x^{3/2})\Big|_0^4 = 4-\frac{2}{3}\cdot 8 = -\frac{4}{3}$

8. $\int_0^1 f(x)dx = 2$ ve $\int_1^0 g(x)dx = 5$

Buna göre,

$\int_0^1 [2f(x)+g(x)]dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) -3 B) -1 C) 1 D) 2 E) 7

$2\cdot\int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx$

$2\cdot 2 + (-5) = -1$

9. $\int_{-1}^5 f(x)dx = 12$

$\int_4^5 f(x)dx = 5$

olduğuna göre, $\int_{-1}^4 f(x)dx$ **integralinin sonucu kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

$\int_{-1}^4 f(x)dx + \int_4^5 f(x)dx = 12$

$\int_{-1}^4 f(x)dx = 7$

10. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\int_{-2}^5 f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$\int_{-2}^0 -1\,dx + \int_0^5 1\,dx = -x\Big|_{-2}^0 + x\Big|_0^5$

$= 0-2+5-0$

$= 3$

11. $\int_{-1}^1 x\cdot|x|dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) -1 B) $\frac{-1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 1

$\int_{-1}^0 -x^2dx + \int_0^1 x^2dx$

$-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^0 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 0-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0$

$= 0$

12. $\int_2^8 f\left(\frac{x}{2}-2\right)dx = 12$

$u = \frac{x}{2}-2 \Rightarrow du = \frac{dx}{2}$

$x=2$ için $u=-1$

$x=8$ için $u=2$

olduğuna göre, $\int_{-1}^2 f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12

$\int_{-1}^2 f(u)\,2\,du = 12 \Rightarrow \int_{-1}^2 f(u)\,du = 6$

1. D	2. C	3. A	4. A	5. B	6. C
7. D	8. B	9. A	10. C	11. C	12. D

AÇIL MATEMATİK

1. $\int_{-1}^{a} x^2 dx = -21$

olduğuna göre, a kaçtır?

A) –6 B) –5 C) –4 D) –3 E) –2

$\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{a} = -21 \Rightarrow \frac{a^3}{3} + \frac{1}{3} = -21$

$a^3 + 1 = -63$

$a^3 = -64$

$a = -4$

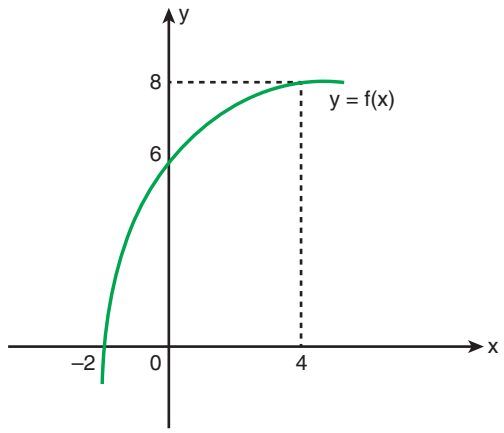
2. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{25}{3}$ C) $\frac{37}{3}$ D) $\frac{46}{3}$ E) $\frac{52}{3}$

$\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_{1}^{9} = \frac{2}{3}\cdot 3^3 - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$

3. Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



Buna göre, $\int_{0}^{8} d[f^{-1}(x)]$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

$f^{-1}(x)\Big|_0^8 = f^{-1}(8) - f^{-1}(0) = 6$

$4 \quad -2$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 2x^2 - \left(\int_{2}^{3} 2x\, dx\right) \cdot x + 3$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, f fonksiyonunun ekstremum noktasının apsisi kaçtır?

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{9}{4}$

$f(x) = 2x^2 - x^2\Big|_2^3 \cdot x + 3$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$f'(x) = 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$

5. $\int_{0}^{1} f(x)\cdot f'(x)\, dx = 24$ $\quad u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\, dx$

$\int_{0}^{1} f'(x)\, dx = 4 \Rightarrow f(x)\Big|_0^1 = 4 \Rightarrow f(1) - f(0) = 4$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, f(1) kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

$* \int f(x)\cdot f'(x)\, dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C$

$\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\, dx = \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 = 24 \Rightarrow f^2(1) - f^2(0) = 48$

$(f(1) - f(0))\cdot(f(0) + f(1)) = 48$

$4 \qquad 12$

$f(1) - f(0) = 4$

$+\ f(0) + f(1) = 12$

$2f(1) = 16 \Rightarrow f(1) = 8$

6. Her $x \in \mathbb{R}$ için, f(–x) = –f(x) olmak üzere,

$\int_{-3}^{8} f(x)\, dx = 6$ dır.

$\int_{-3}^{3} f(x)\, dx + \int_{3}^{8} f(x)\, dx = 6$

0

$\int_{3}^{8} f(x)\, dx = 6$

Buna göre, $\int_{8}^{3} f(x)\, dx$ **kaçtır?**

A) –12 B) –6 C) –3 D) 3 E) 6

f tek fonksiyondur.

$\int_{8}^{3} f(x)\, dx = -\int_{3}^{8} f(x)\, dx = -6$

7. $\displaystyle\int_1^{16} \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}dx$

integralinde $x = u^4$ dönüşümü yapıldığında elde edilen integralin eşiti aşağıdakilerden hangisi olur?

A) $\displaystyle\int_1^2 \frac{u^2}{u-1}du$ B) $\displaystyle 2\cdot\int_1^2 \frac{u^2}{u-1}du$

C) $\displaystyle 4\cdot\int_1^2 \frac{u^2}{u-1}du$ D) $\displaystyle 2\cdot\int_1^2 \frac{u^2+1}{u-1}du$

E) $\displaystyle 4\cdot\int_1^2 \frac{u^2+1}{u-1}du$

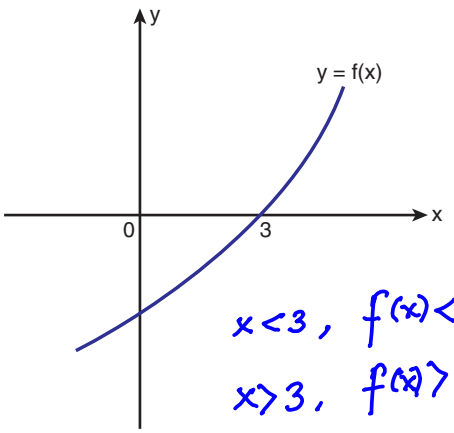
$x=u^4 \Rightarrow dx=4u^3du$

$x=1$ için $u=1$, $x=16$ için $u=2$

$\displaystyle\int_1^2 \frac{u+u^2}{u^4-u^2}\cdot 4u^3du = 4\cdot\int_1^2 \frac{u\cancel{(1+u)}\cdot u^3}{u^2\cdot(u-1)\cancel{(u+1)}}du$

$\displaystyle = 4\cdot\int_1^2 \frac{u^2}{u-1}du$

8. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$x<3$, $f(x)<0$

$x>3$, $f(x)>0$

Buna göre,

$\displaystyle\int_0^4 \frac{|f(x)|}{f(x)}dx$

integralinin sonucu kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

$\displaystyle\int_0^3 \frac{-\cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}}dx + \int_3^4 \frac{\cancel{f(x)}}{\cancel{f(x)}}dx = -x\Big|_0^3 + x\Big|_3^4$

$= -3+1$

$= -2$

9. $\displaystyle\int_{-7}^{7} (x^5-2x^3+1)dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) 28 B) 14 C) 7 D) 0 E) –7

$\displaystyle\underbrace{\int_{-7}^{7}(\underbrace{x^5-2x^3}_{\text{Tek Fonksiyon}})dx}_{0} + \int_{-7}^{7} 1\,dx = x\Big|_{-7}^{7} = 14$

10. $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 18$

$u=x^3 \Rightarrow du=3x^2\cdot dx$

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=1 \Rightarrow u=1$

olduğuna göre, $\displaystyle\int_0^1 x^2\cdot f(x^3)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12

$\displaystyle\int_0^1 f(u)\cdot\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 f(x)\cdot dx = \frac{18}{3} = 6$

11. f gerçel sayılarda tanımlı bir tek fonksiyondur.

$\displaystyle\int_{-4}^{1} f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = 3$ tür.

$u=\frac{x}{3} \Rightarrow du=\frac{dx}{3}$

$\displaystyle = \int_0^1 f(u)\cdot 3du = 3\cdot\int_0^1 f(u)du$

$= 3\cdot 3 = 9$

Buna göre, $\displaystyle\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) 15 B) 12 C) 9 D) 6 E) 3

$\displaystyle\int_{-4}^{0} f(x)\cdot dx + \int_0^1 f(x)dx + \int_0^4 f(x)dx = 3$

$\displaystyle\underbrace{\int_{-4}^{4} f(x)dx}_{0} + \int_0^1 f(x)dx = 3 \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 3$

12. $\displaystyle\int_1^2 (2x-1)\cdot(x^2-x-2)^4dx$

$u=x^2-x-2$

$du=(2x-1)\cdot dx$

$x=1 \Rightarrow u=-2$

$x=2 \Rightarrow u=0$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{16}{5}$ C) $\frac{24}{5}$ D) $\frac{32}{5}$ E) $\frac{36}{5}$

$\displaystyle\int_{-2}^{0} u^4\cdot du = \frac{u^5}{5}\Big|_{-2}^{0} = 0+\frac{32}{5} = \frac{32}{5}$

1. C	2. E	3. C	4. C	5. E	6. B
7. C	8. C	9. B	10. D	11. C	12. D

ACİL MATEMATİK

1. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\int_0^4 x \cdot d(ax) = 24$$

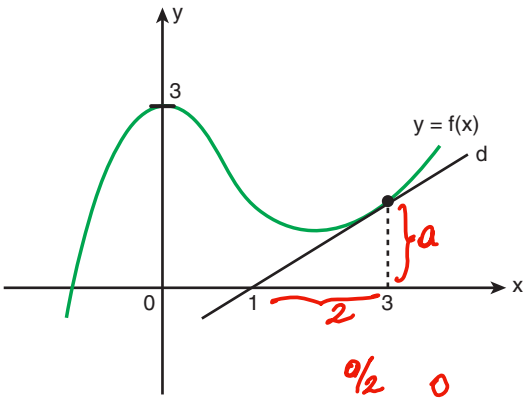
olduğuna göre, a kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

$\int_0^4 x \cdot a\,dx = a\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 24$

$8a = 24 \Rightarrow a = 3$

2. Aşağıda, f fonksiyonunun ve bu fonksiyona x = 3 apsisli noktasından çizilen teğet doğrusunun grafiği gösterilmiştir.



$\int_0^3 f''(x)\,dx = \frac{3}{4} \Rightarrow f'(x)\Big|_0^3 = f'(3) - f'(0) = \frac{3}{4}$

$\frac{a}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

olduğuna göre, $\int_0^3 f'(x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) –2 B) $\frac{-3}{2}$ C) –1 D) $\frac{-1}{2}$ E) $\frac{-1}{3}$

$\int_0^3 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^3 = f(3) - f(0)$

$= \frac{3}{2} - 3$

$= \frac{-3}{2}$

3. $f(x) = x^3 \cdot \left[\int_1^2 x^2 dx\right]$

fonksiyonu veriliyor. $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

Buna göre, f'(1) kaçtır?

A) 1 B) 4 C) 7 D) 9 E) 12

$f(x) = \frac{7x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = 7x^2$

$f'(1) = 7$

4. $\int_{-1}^0 (2x+3)\cdot(x^2+3x)^3 dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) –8 B) –4 C) –2 D) 4 E) 8

$u = x^2+3x \Rightarrow du = (2x+3)dx$

$x = -1 \Rightarrow u = -2$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$\int_{-2}^0 u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4}\Big|_{-2}^0 = 0 - 4 = -4$

5. $\int_{-1}^1 \frac{x^2+2x+1}{x^4+x^3} dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) –4 B) –3 C) –2 D) –1 E) 0

$\int_{-1}^1 \frac{(x+1)^2}{x^3(x+1)} dx = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^3} dx = \int_{-1}^1 (x^{-2}+x^{-3})\,dx$

$\left(\frac{-1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right)\Big|_{-1}^1 = \left(-1-\frac{1}{2}\right) - \left(1-\frac{1}{2}\right) = -2$

6. $f(0) = 3$ ve $f(3) = 0$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre,

$\int_0^3 [f'(f(x)) \cdot f'(x)]dx$

integralinin sonucu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)\cdot dx$

$x = 0 \Rightarrow u = f(0) = 3$

$x = 3 \Rightarrow u = f(3) = 0$

$\int_3^0 f'(u)\,du = f(u)\Big|_3^0$

$= f(0) - f(3)$

$= 3 - 0$

$= 3$

AÇIL MATEMATİK

7. f gerçel sayılar kümesinde tanımlı bir çift fonksiyondur.

$\int_{-4}^{4} f(x)\,dx = 16$ ve $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 2$ dir.

Buna göre, $\int_{2}^{4} f(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

$2\cdot\int_{0}^{4} f(x)\,dx = 16 \Rightarrow \int_{0}^{4} f(x)\,dx = 8$

$\int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{4} f(x)\,dx = 8 \Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)\,dx = 6$

8. $\int_{0}^{5} \frac{x-1}{\sqrt{x+4}}\,dx$

$u^2 = x+4 \Rightarrow 2u\,du = dx$

$x=0 \Rightarrow u=2$

$x=5 \Rightarrow u=3$

integralinin sonucu kaçtır?

A) $\frac{28}{3}$ B) $\frac{22}{3}$ C) $\frac{16}{3}$ D) $\frac{8}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

$\int_{2}^{3} \frac{u^2-5}{u}\cdot 2u\,du = 2\left(\frac{u^3}{3}-5u\right)\Big|_2^3$

$= 2\cdot\left[(-6)-\left(\frac{8}{3}-10\right)\right]$

$= \frac{8}{3}$

9. $\int_{-1}^{4} x|x-2|\,dx = \int_{-1}^{2}(-x^2+2x)\,dx + \int_{2}^{4}(x^2-2x)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{10}{3}$ C) $\frac{13}{3}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{20}{3}$

$\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_{-1}^{2} + \left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{2}^{4}$

$\frac{4}{3}-\frac{4}{3}+\frac{16}{3}+\frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

10. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^3}$

$u = 1-\frac{1}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x^2}dx$

$x=2 \Rightarrow u=1/2$

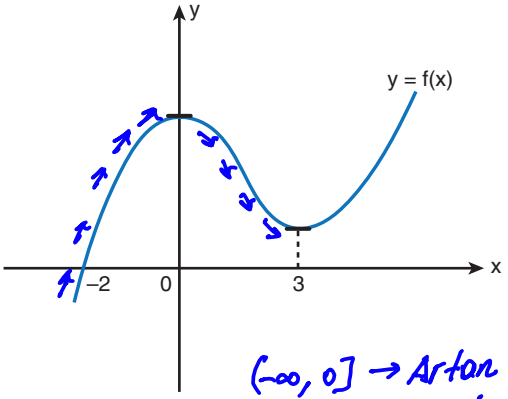
$x=3 \Rightarrow u=2/3$

integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{9}{10}$

$\int_{1/2}^{2/3} \frac{du}{u^3} = \frac{-1}{2u^2}\Big|_{1/2}^{2/3} = \frac{-9}{8}+2 = \frac{7}{8}$

11. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$(-\infty, 0] \rightarrow$ Artan $f'(x) > 0$

$[0, 3] \rightarrow$ Azalan $f'(x) < 0$

$$g(x) = \begin{cases} x, & f'(x) < 0 \\ 2, & f'(x) \geq 0 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor.

Buna göre, $\int_{-2}^{3} g(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) $\frac{17}{2}$ B) $\frac{21}{2}$ C) $\frac{33}{2}$ D) $\frac{45}{2}$ E) $\frac{51}{2}$

$\int_{-2}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx = 2x\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3}$

$= 4+\frac{9}{2}$

$= \frac{17}{2}$

12. $\int_{2}^{6} f(x)\,dx = 12$

$u = 2x \Rightarrow du = 2\cdot dx$

$x=1 \Rightarrow u=2$

$x=3 \Rightarrow u=6$

olduğuna göre,

$\int_{1}^{3} [1-f(2x)]\,dx = \int_{1}^{3} 1\,dx - \int_{1}^{3} f(2x)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) –6 B) –4 C) –3 D) 4 E) 6

$x\Big|_1^3 - \int_{2}^{6} f(u)\,\frac{du}{2} = 2-\frac{1}{2}\cdot 12$

$= -4$

1. B	2. B	3. C	4. B	5. C	6. D
7. D	8. D	9. E	10. D	11. A	12. B

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

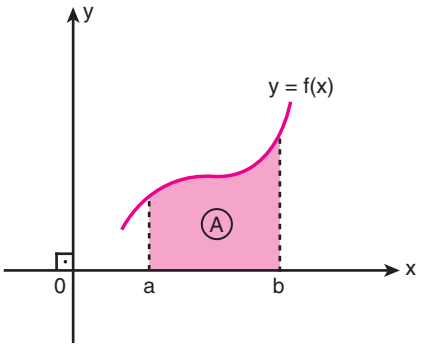
BELİRLİ İNTEGRAL İLE ALAN HESABI

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ sürekli bir fonksiyon olsun.

Denklemi $y = f(x)$ olan eğriyle, $x = a$, $x = b$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı,

$f(x) \geq 0$ ise

$$A = \text{Alan} = \int_a^b f(x)\,dx \text{ tir.}$$

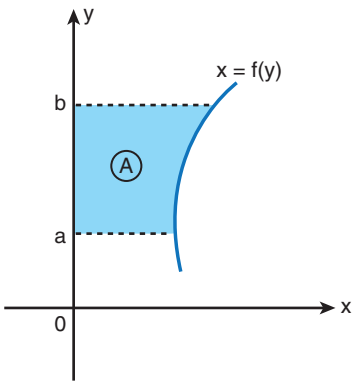


YANINDA BULUNSUN

$x = f(y)$ eğrisi, $y = a$ ve $y = b$ doğruları ile y ekseni arasında kalan alan,

$x \geq 0$ ise

$$A = \text{Alan} = \int_a^b f(y)\,dy \text{ dir.}$$



ÖRNEK 1.

$y = x^2$ parabolü, $x = 1$ ve $x = 3$ doğruları ile x ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$$\int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

ÖRNEK 2.

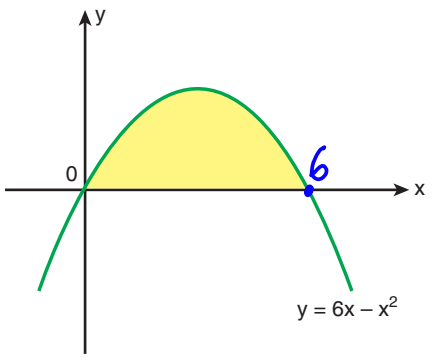
$y = x + 4$, $x = -1$, $x = 3$ doğruları ve x ekseni arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^3 (x+4)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-1}^3$$
$$= \left(\frac{9}{2} + 12\right) - \left(\frac{1}{2} - 4\right)$$
$$= 20$$

ÖRNEK 3.

Aşağıda, $y = 6x - x^2$ parabolü gösterilmiştir.



Buna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$$\int_0^6 (6x - x^2)\,dx = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^6$$
$$= (108 - 72) - 0$$
$$= 36$$

1. $\frac{26}{3}$	2. 20	3. 36

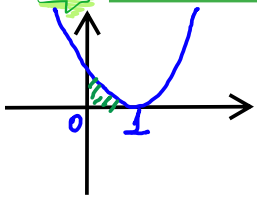
AÇIL MATEMATİK

ÖRNEK 4.

$y = (x - 1)^2$

parabolü ile koordinat eksenleri tarafından sınırlanan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM



$$\int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{(x-1)^3}{3}\Big|_0^1$$

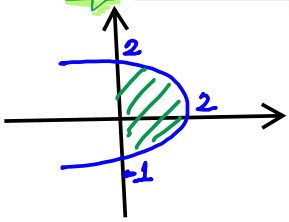
$$= \frac{1}{3}$$

ÖRNEK 5.

$x = 2 + y - y^2$

parabolü ile y ekseni arasında kalan alan kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM



$$\int_{-1}^{2} (2+y-y^2)\, dy$$

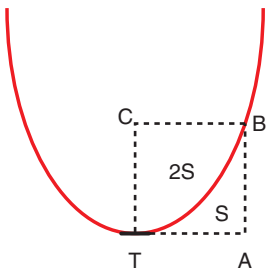
$$\left(2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}$$

$$\left(4+2-\frac{8}{3}\right) - \left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{2}$$

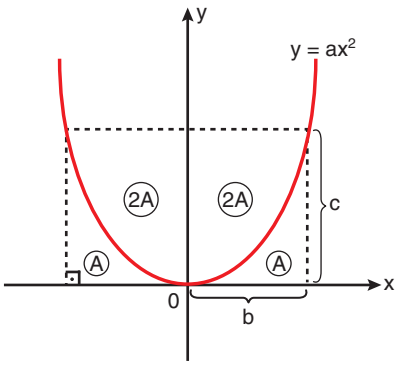
YANINDA BULUNSUN

PARABOLLER İÇİN PRATİK YOL

Bir köşesi parabolün tepe noktası olmak üzere oluşturulan TABC dikdörtgenlerinin alanı; parabol tarafından, alanları oranı $\frac{1}{2}$ olan iki bölgeye ayrılır.

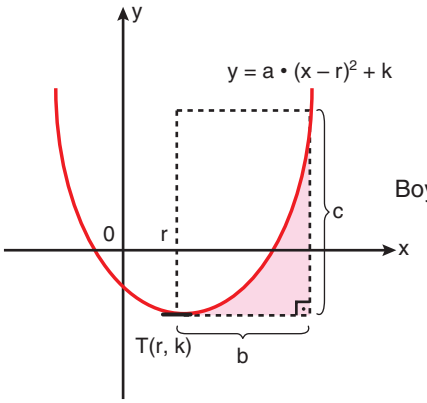


1)



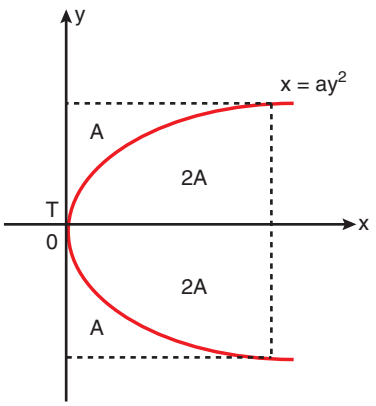
$$A = \frac{b \cdot c}{3}$$

2)

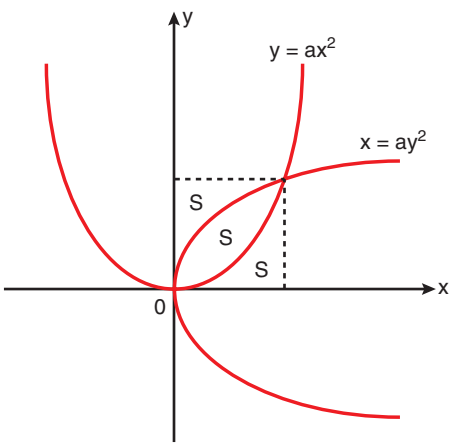


Boyalı alan = $\frac{b \cdot c}{3}$ tür.

3)



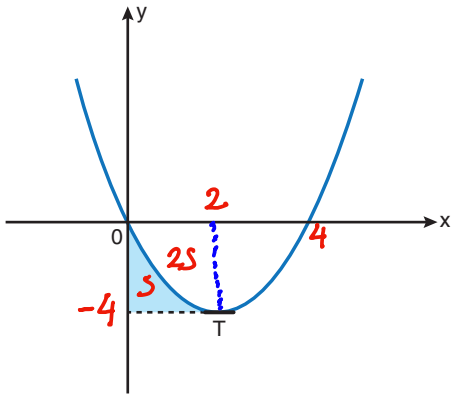
4)



4. $\frac{1}{3}$	5. $\frac{9}{2}$

ÖRNEK 6.

Aşağıda, $y = x^2 - 4x$ parabolü gösterilmiştir.



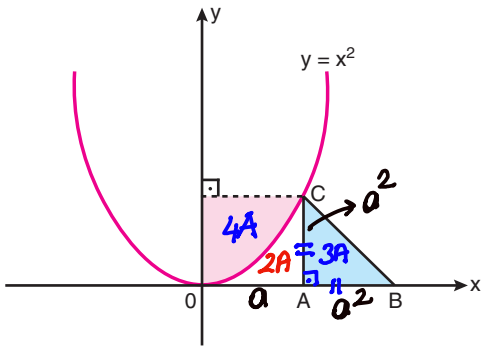
T noktası, parabolün tepe noktası olduğuna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$3S = 8$

$S = \frac{8}{3}$

ÖRNEK 7.



Şekilde verilen pembe renkli bölgenin alanı, ABC ikizkenar dik üçgeninin alanının $\frac{4}{3}$ katına eşittir.

Buna göre, A noktasının apsisi kaçtır?

ÇÖZÜM

$6A = a \cdot a^2$

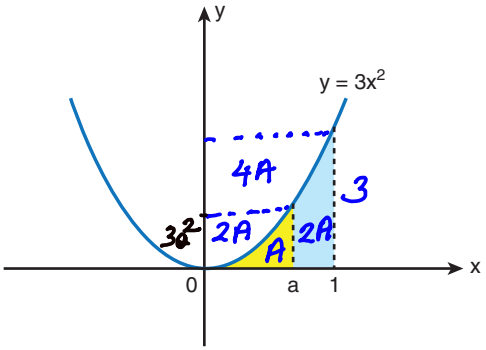
$A = \frac{a^3}{6}$

$3A = \frac{a^2 \cdot a^2}{2}$

$A = \frac{a^4}{6}$

$\frac{a^3}{6} = \frac{a^4}{6} \Rightarrow a = 1$

ÖRNEK 8.



Şekilde mavi bölgenin alanı, sarı bölgenin alanının 2 katına eşittir.

Buna göre, a kaçtır?

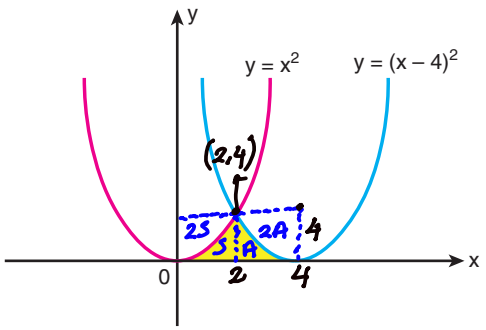
ÇÖZÜM

$9A = 3 \Rightarrow A = \frac{1}{3} \Rightarrow 3A = 1$

$3A = 3a^2 \cdot a \Rightarrow 3a^3 = 1$

$a = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

ÖRNEK 9.



Şekilde, $y = x^2$ ve $y = (x - 4)^2$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$x^2 = (x-4)^2 \Rightarrow x = -x + 4 \Rightarrow 2x = 4$

$x = 2$

$3S + 3A = 4 \cdot 4$

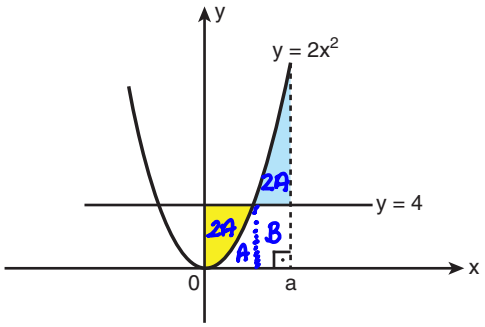
$A + S = \frac{16}{3}$

6. $\frac{8}{3}$	7. 1	8. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$	9. $\frac{16}{3}$

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 10.

Aşağıda, $y = 2x^2$ eğrisi ile $y = 4$ doğrusu gösterilmiştir.



Boyalı bölgelerin alanları birbirine eşit olduğuna göre, a kaçtır?

ÇÖZÜM

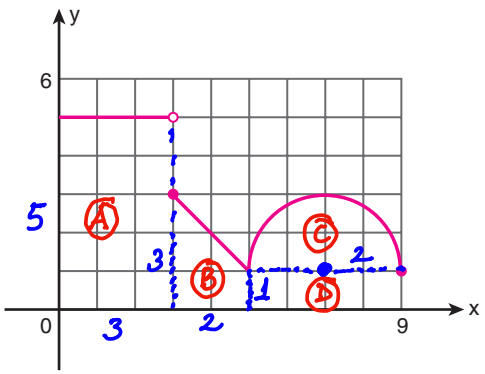
$3A+B = 4\cdot a = \int_0^a 2x^2\,dx$

$4a = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^a \Rightarrow 4a = \frac{2a^3}{3} \Rightarrow a^2 = 6$

$a = \sqrt{6}$

ÖRNEK 11.

Aşağıdaki şekil birim karelerden oluşmaktadır. [0, 9] aralığında bir f fonksiyonunun grafiği 2 doğru parçası ve bir yarım çemberden oluşmaktadır.



Buna göre, $\int_0^9 f(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$A = 3.5 = 15,\quad B = \frac{1+3}{2}.2,\quad C = \pi.\frac{2^2}{2} = 2\pi$

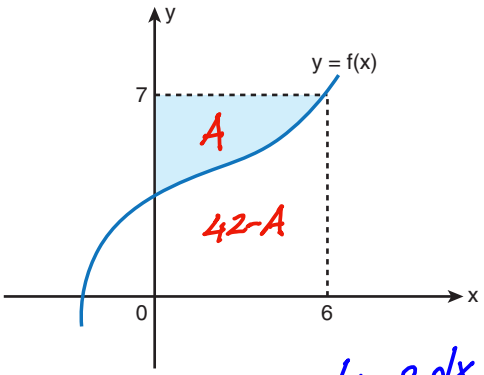
$B = 4 \qquad D = 1.4 = 4$

$A+B+C+D = 15+4+2\pi+4$

$= 23+2\pi$

ÖRNEK 12.

Aşağıda, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$\int_0^3 f(2x)\,dx = 15$

$u = 2x \Rightarrow du = 2.dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 3 \Rightarrow u = 6$

olduğuna göre, taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

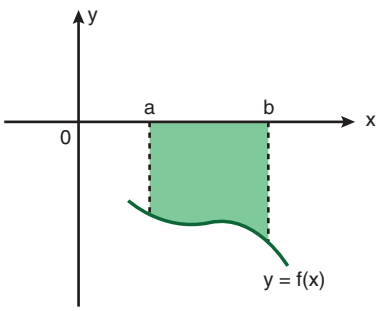
$\int_0^6 f(u)\,\frac{du}{2} = 15 \Rightarrow \int_0^6 f(u)\,du = 30$

$42 - A = 30$

$A = 12$

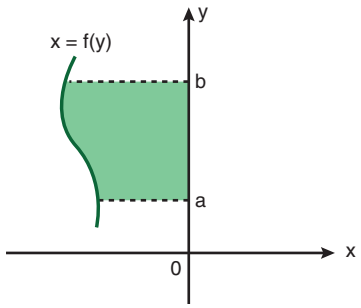
YANINDA BULUNSUN

$f(x) \le 0$ ise Alan $= -\int_a^b f(x)\,dx$ tir.



10. $\sqrt{6}$	11. $2\pi + 23$	12. 12

YANINDA BULUNSUN



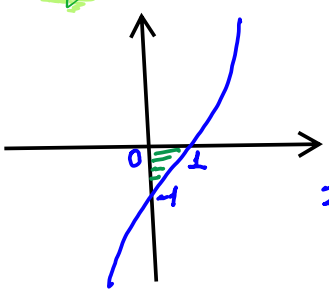
$x \le 0$ ise Alan $= -\int_a^b f(y)\,dy$ dir.

ÖRNEK 13.

$f(x) = x^3 - 1$

fonksiyonunun grafiği ile eksenler arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

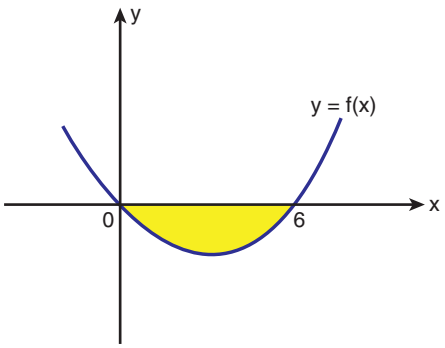
ÇÖZÜM



$\int_{-1}^{0} \sqrt[3]{y+1}\,dy$

$\frac{3}{4}(y+1)^{4/3}\Big|_{-1}^{0} = \frac{3}{4}$

ÖRNEK 14.



Şekilde gösterilen boyalı bölgenin alanı 24 birimkaredir.

Buna göre, $\int_0^2 f(3x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

$u = 3x \Rightarrow du = 3\,dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 2 \Rightarrow u = 6$

$\int_0^6 f(u)\frac{du}{3} = ?$

ÇÖZÜM

$-\int_0^6 f(x)\,dx = 24 \Rightarrow \int_0^6 f(x)\,dx = -24$

$\int_0^6 f(u)\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int_0^6 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\cdot(-24) = -8$

ÖRNEK 15.

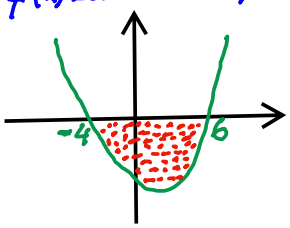
$a < b$ olmak üzere,

$$\int_a^b (x^2 - 2x - 24)\,dx$$

integralinin en küçük değerini alması için b – a farkı kaç olmalıdır?

ÇÖZÜM

$f(x) = x^2 - 2x - 24$



$a = -4$, $b = 6$

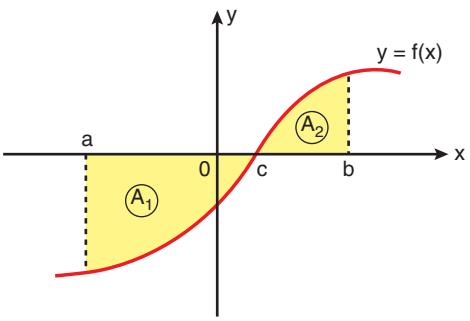
$b - a = 10$

YANINDA BULUNSUN

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$ fonksiyonu, $[a, b]$ nin bazı alt aralıklarında negatif veya pozitif değerler alıyorsa fonksiyonun pozitif ve negatif olduğu bölgelerdeki alanlar ayrı ayrı bulunarak bu alanlar toplanır.

Aşağıdaki şekle göre,

$$\text{Alan} = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx \text{ tir.}$$

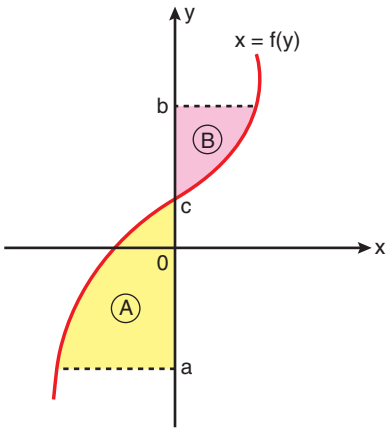


13. $\frac{3}{4}$	14. –8	15. 10

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

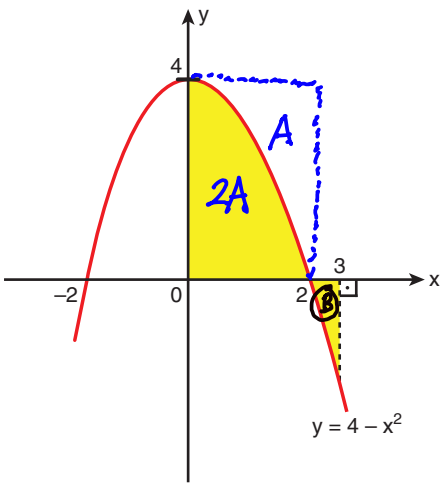
$x \geq 0$ için alan integral değerine ve $x \leq 0$ için alan, integralin zıt işaretlisine eşittir.



$$\text{Alan} = A + B = \int_c^b f(y)\,dy - \int_a^c f(y)\,dy \text{ dir.}$$

ÖRNEK 16.

Aşağıda, $y = 4 - x^2$ parabolünün grafiği verilmiştir.



Buna göre, boyalı bölgelerin alanları toplamı kaç birimkaredir?

$3A = 4 \cdot 2 \Rightarrow A = 8/3$

$2A = 16/3$

ÇÖZÜM

$$B = -\int_2^3 (4-x^2)\,dx = \left(-4x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^3$$

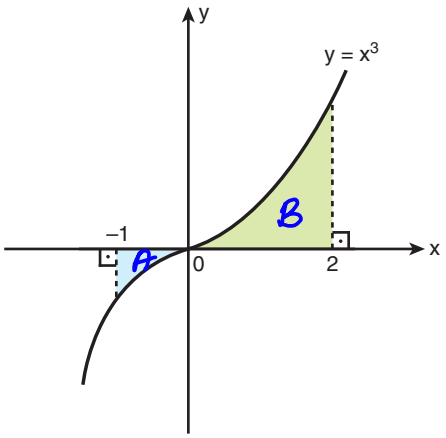
$$= (-12+9) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{7}{3}$$

$$2A + B = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}$$

ÖRNEK 17.

Aşağıda, $y = x^3$ eğrisi verilmiştir.



Buna göre, boyalı bölgelerin alanları farkının pozitif değeri kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$$A = \int_{-1}^{0} -x^3\,dx = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$$

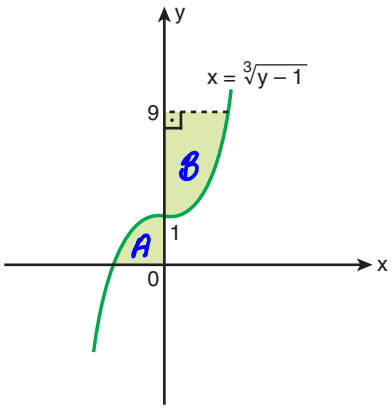
$$B = \int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4$$

$$B - A = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

16. $\frac{23}{3}$	17. $\frac{15}{4}$

ÖRNEK 18.

Aşağıda, $x = \sqrt[3]{y-1}$ eğrisinin grafiği verilmiştir.



Buna göre, boyalı bölgelerin alanları toplamı kaç birimkaredir?

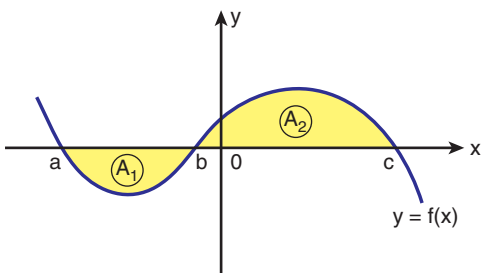
ÇÖZÜM

$$A = \int_0^1 -\sqrt[3]{y-1}\,dy = -\frac{3}{4}(y-1)^{4/3}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

$$B = \int_1^9 \sqrt[3]{y-1}\,dy = \frac{3}{4}(y-1)^{4/3}\Big|_1^9 = 12$$

$$A+B = \frac{3}{4}+12 = \frac{51}{4}$$

YANINDA BULUNSUN



Yukarıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği ve eksenler arasında kalan sınırlı bölgelerin alanları A_1 ve A_2 olmak üzere,

$\int_a^c f(x)\,dx$ integralinin değeri,

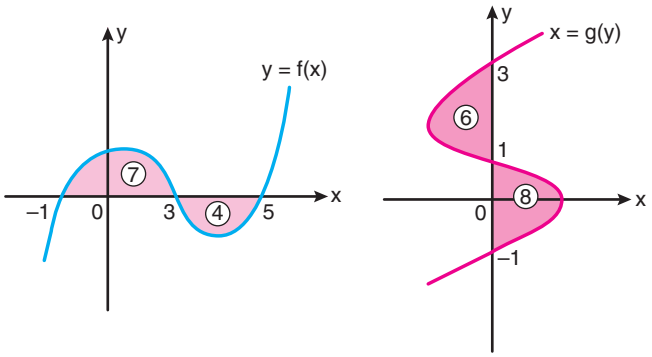
$$\int_a^c f(x)\,dx = -A_1 + A_2 \text{ olur.}$$

[a, c] nda f(x) fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan sınırlı bölgenin alanı,

$$\int_a^c |f(x)|\,dx = A_1 + A_2 \text{ olur.}$$

ÖRNEK 19.

Aşağıda, y = f(x) ve x = g(y) eğrileri gösterilmiştir.



Verilen bölgelerdeki sayılar o bölgenin birimkare cinsinden alanını ifade etmektedir.

$$A = \int_{-1}^{5} f(x)\,dx \text{ ve } B = \int_{-1}^{3} g(y)\,dy$$

olduğuna göre, A + B toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$$A = 7-4 = 3$$

$$B = 8-6 = 2$$

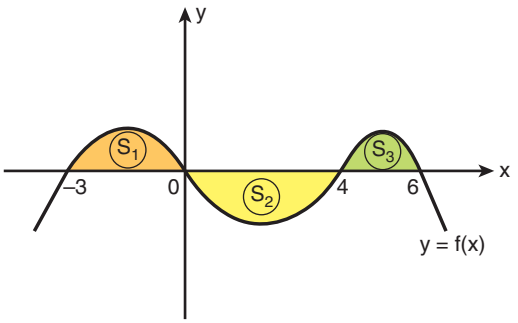
$$A+B = 3+2 = 5$$

ACİL MATEMATİK

18. $\frac{51}{4}$	19. 5

ÖRNEK 20.

Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



S_1, S_2 ve S_3 bulundukları bölgelerin alanlarıdır.

$\int_{-3}^{6} f(x)\,dx = 3$ ve $S_1 - S_2 + S_3 = 3$

$\int_{-3}^{6} |f(x)|\,dx = 17$ $S_1 + S_2 + S_3 = 17$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre, S_2 bölgesinin alanı kaç birimkaredir?

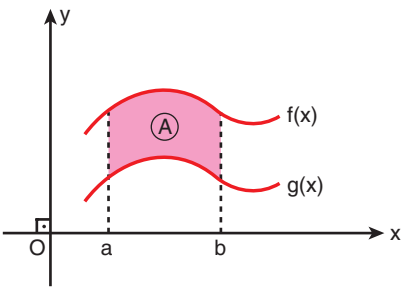
ÇÖZÜM

$-/\ S_1 - S_2 + S_3 = 3$

$S_1 + S_2 + S_3 = 17$

$2S_2 = 14 \Rightarrow S_2 = 7$

YANINDA BULUNSUN



[a, b] nda $f(x) \geq g(x)$ olmak üzere, $y = f(x)$, $y = g(x)$ fonksiyonlarının grafikleri ile $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırladığı bölgenin alanı,

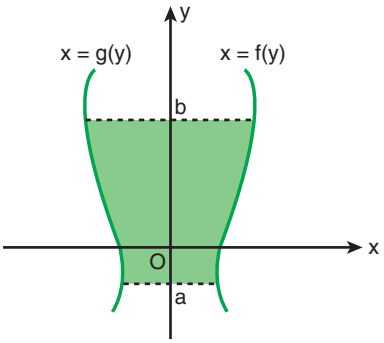
$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \text{ tir.}$$

[Üstteki fonksiyondan altta kalan fonksiyonu çıkarırız.]

YANINDA BULUNSUN

$x = f(y)$, $x = g(y)$ eğrileri ile $y = a$ ve $y = b$ doğruları arasında kalan alanı bulmak için sağdaki eğrinin denkleminden, soldaki eğrinin denklemini çıkarırız.

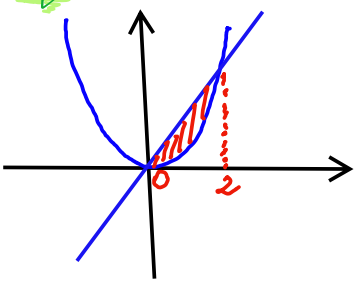


Boyalı Alan $= \int_a^b [f(y) - g(y)]\,dy$ dir.

ÖRNEK 21.

$y = x^2$ eğrisi ile $y = 2x$ doğrusu arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM



$\int_0^2 (2x - x^2)\,dx$

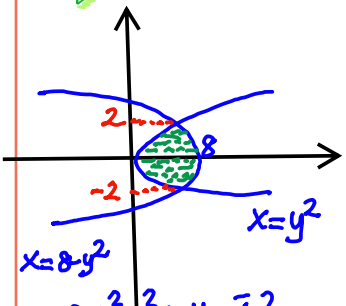
$\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3}$

$= \frac{4}{3}$

ÖRNEK 22.

$x = y^2$ ve $x = 8 - y^2$ eğrileri arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM



$\int_{-2}^{2} (8 - y^2 - y^2)\,dy$

$\left(8y - \frac{2y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}$

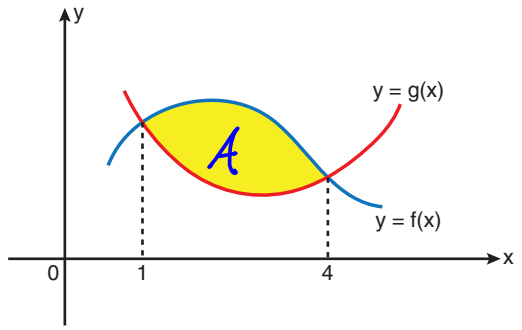
$\left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3}$

$8 - y^2 = y^2 \Rightarrow y = \mp 2$

20. 7	21. $\frac{4}{3}$	22. $\frac{64}{3}$

ÖRNEK 23.

Aşağıda, y = f(x) ve y = g(x) fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.



$\int_1^4 (f(x)+1)\,dx = 20$ ve $\int_1^4 (g(x)-2)\,dx = 3$

olduğuna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$\int_1^4 f(x)\,dx + x\Big|_1^4 = 20 \Rightarrow \int_1^4 f(x)\,dx = 17$ (4 − 1)

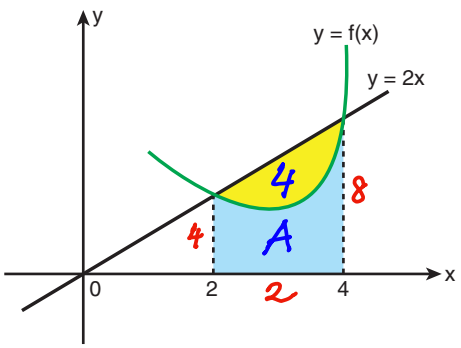
$\int_1^4 g(x)\,dx - 2x\Big|_1^4 = 3 \Rightarrow \int_1^4 g(x)\,dx = 9$

$A = \int_1^4 [f(x)-g(x)]\,dx \Rightarrow A = 17 - 9$

$A = 8$

ÖRNEK 24.

Aşağıda, y = f(x) fonksiyonu ile y = 2x doğrusunun grafikleri gösterilmiştir.



Sarı bölgenin alanı 4 birimkaredir.

Buna göre, $\int_0^1 f(2x+2)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

$u = 2x+2 \Rightarrow du = 2\,dx$

$x = 0 \Rightarrow u = 2$

$x = 1 \Rightarrow u = 4$

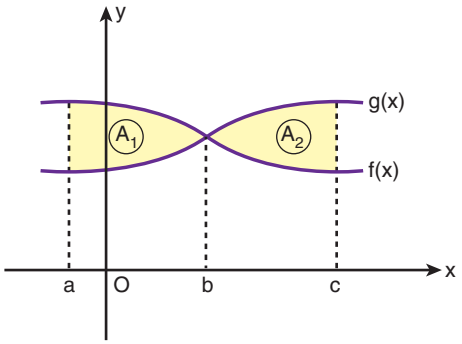
ÇÖZÜM

$\int_2^4 f(u)\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\int_2^4 f(x)\,dx = \frac{A}{2}$ (A)

$A + 4 = \frac{4+8}{2}\cdot 2 \Rightarrow A = 8$

$A = 8 \Rightarrow \frac{A}{2} = 4$

YANINDA BULUNSUN



Eğer f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri yukarıdaki gibi verilirse boyalı bölgelerin toplam alanı, A_1 ve A_2 alanlarının ayrı ayrı hesaplanarak toplanması ile bulunur.

- $A = A_1 + A_2 = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx + \int_b^c (g(x)-f(x))\,dx$ olur.
- $\int_a^c [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx + \int_b^c [f(x)-g(x)]\,dx$

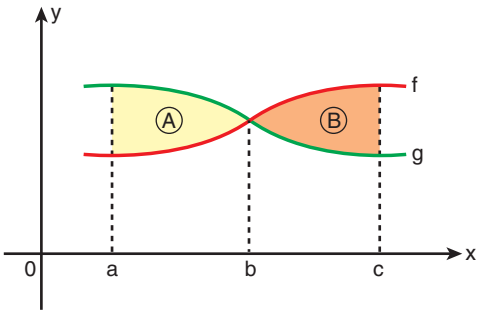
  $\int_a^c [f(x)-g(x)]\,dx = A_1 + (-A_2)$

  $\int_a^c [f(x)-g(x)]\,dx = A_1 - A_2$ dir.
- $\int_a^c |f(x)-g(x)|\,dx = A_1 + A_2$ dir.

23. 8	24. 4

ÖRNEK 25.

Aşağıda, f ve g fonksiyonlarının grafikleri gösterilmiştir.



A ve B bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir.

$$A + B = 14 \text{ ve } \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx = -4$$

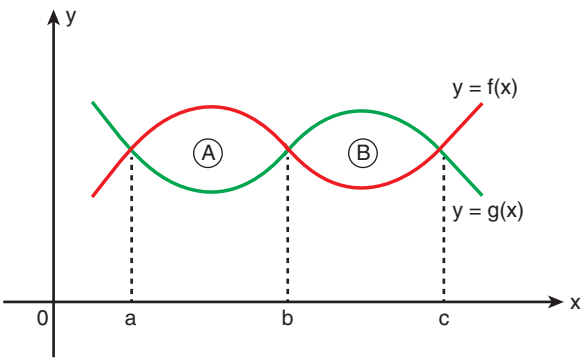
olduğuna göre, B kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$-A+B=-4$ ve $A+B=14$ $\Rightarrow 2B=10$, $B=5$

ÖRNEK 26.

Aşağıda, f ve g fonksiyonlarının grafikleri gösterilmiştir.



A ve B bulundukları bölgelerin alanlarını göstermektedir.

$$\int_a^c [g(x) - f(x)]\,dx = 4 \Rightarrow -A+B=4$$

$$\int_b^c [f(x) - g(x)]\,dx = -6 \Rightarrow -B=-6$$

Buna göre, A + B toplamı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

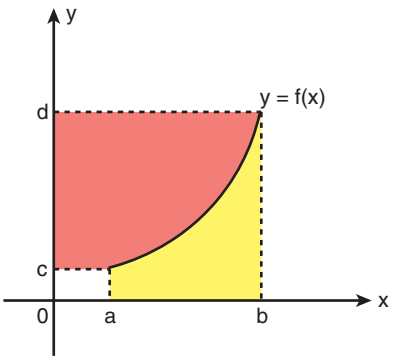
$-A+B=4$ $\quad -B=-6 \Rightarrow B=6$

$B=6 \Rightarrow A=2$

$A+B=2+6=8$

YANINDA BULUNSUN

f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,



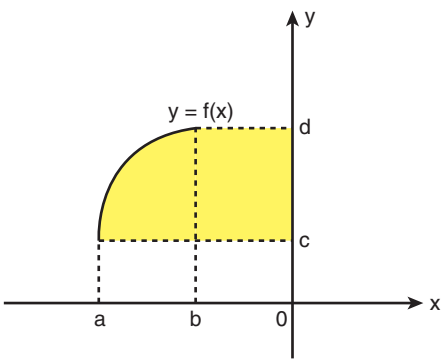
Sarı bölgenin alanının, $\int_a^b f(x)\,dx$ integraline eşit olduğunu biliyoruz.

$x \geq 0$ ise

Kırmızı bölgenin alanı = $\int_c^d f^{-1}(x)\,dx$ tir.

YANINDA BULUNSUN

f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere,



$x \leq 0$ ise

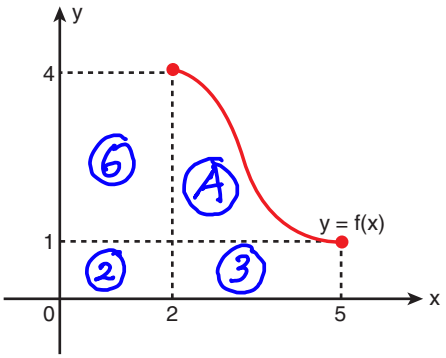
Sarı Bölgenin Alanı = $\int_c^d -f^{-1}(x)\,dx$

Sarı Bölgenin Alanı = $-\int_c^d f^{-1}(x)\,dx$ olur.

25. 5	26. 8

ÖRNEK 27.

Aşağıda, f fonksiyonunun [2, 5] aralığındaki grafiği gösterilmiştir.



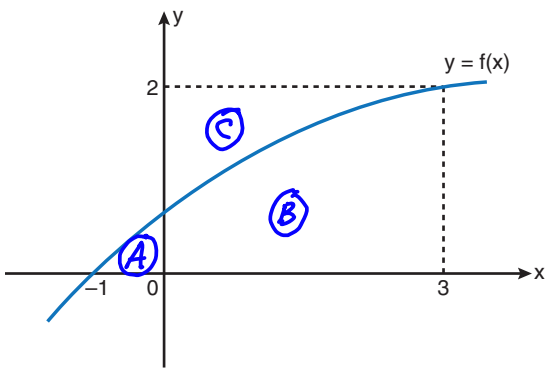
$\int_2^5 f(x)\,dx = 7 \Rightarrow A+3=7 \Rightarrow A=4$

olduğuna göre, $\int_1^4 f^{-1}(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\int_1^4 f^{-1}(x).dx = A+6 = 10$ (4)

ÖRNEK 28.



Yukarıda grafiği verilen y = f(x) fonksiyonuna göre,

$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 5$ dir. $\Rightarrow A+B=5$

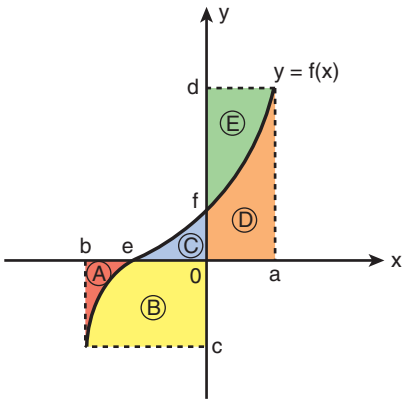
Buna göre, $\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx$ kaçtır? $= C-A$

ÇÖZÜM

$B+C=2.3 \Rightarrow B+C=6$
$-/\ A+B=5$
$C-A=1$

YANINDA BULUNSUN - ÖZET

f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta bire bir ve örten bir fonksiyon olmak üzere,



A, B, C, D ve E bulundukları bölgelerin alanlarını ifade etmektedir.

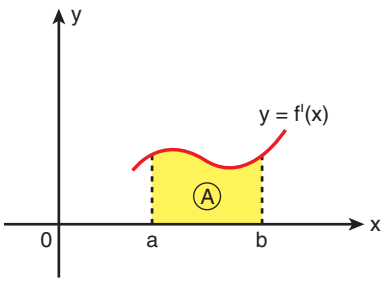
- $\int_b^a f(x)\,dx = D + C - A$
- $\int_b^a |f(x)|\,dx = D + C + A$
- $\int_f^d f^{-1}(x)\,dx = E$
- $\int_0^d f^{-1}(x)\,dx = E - C$
- $\int_c^d f^{-1}(x)\,dx = E - C - B$
- $\int_c^d |f^{-1}(x)|\,dx = E + C + B$
- $\int_b^e f(x)\,dx = -A$
- $\int_0^f f^{-1}(x)\,dx = -C$

27. 10	28. 1

YANINDA BULUNSUN

f', f fonksiyonunun türevi olmak üzere,

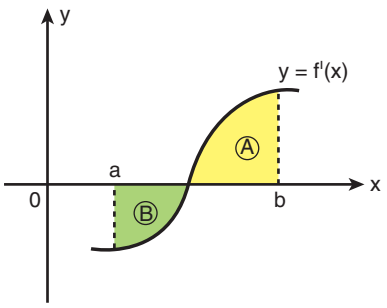
a)



$$\text{Boyalı Alan} = A = \int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

$$A = f(b) - f(a) \text{ olur.}$$

b)



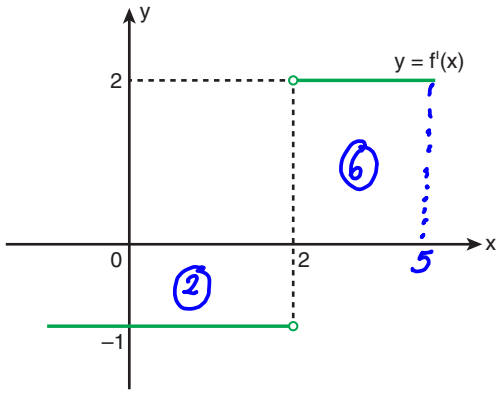
$$\text{Boyalı Alanların Farkı} = A - B = \int_a^b f'(x)\,dx$$

$$A - B = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a)$$

$$A - B = f(b) - f(a) \text{ olur.}$$

ÖRNEK 29.

Aşağıda, gerçel sayılar kümesinde sürekli olan bir f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre, f(5) – f(0) farkı kaçtır?

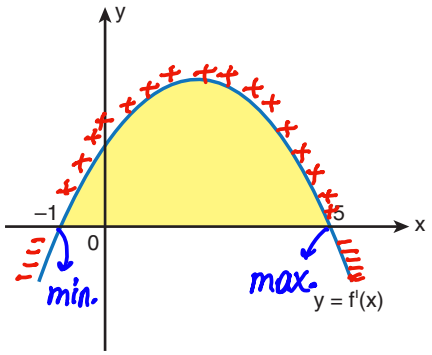
ÇÖZÜM

$$\int_0^5 f'(x)\,dx = 6 - 2$$

$$f(x)\Big|_0^5 = 4 \Rightarrow f(5) - f(0) = 4$$

ÖRNEK 30.

Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun türevi olan $f'(x)$ fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



Boyalı bölgenin alanı 20 birimkaredir.

f(–1) = –4 olduğuna göre, f fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int_{-1}^5 f'(x)\,dx = 20$$

$$f(x)\Big|_{-1}^5 = f(5) - f(-1) = 20$$

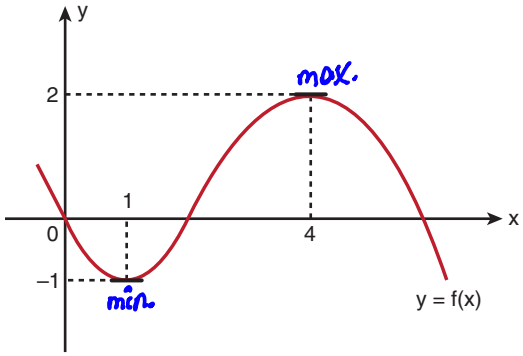
$$f(5) - (-4) = 20$$

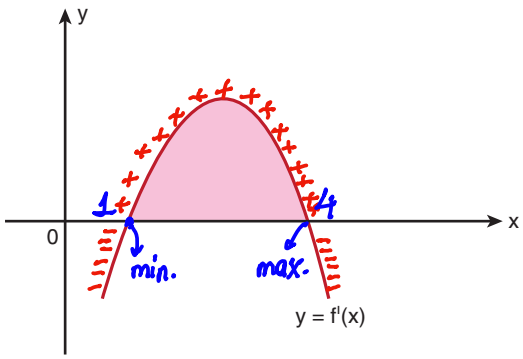
$$f(5) = 16$$

29. 4	30. 16

ÖRNEK 31.

Aşağıda, f fonksiyonunun ve türevinin grafiği gösterilmiştir.





Buna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$$\int_1^4 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_1^4$$

$$= \underbrace{f(4)}_{2} - \underbrace{f(1)}_{-1}$$

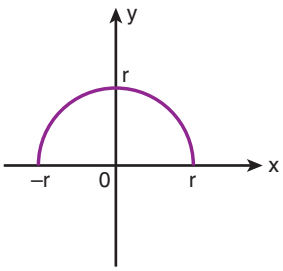
$$= 3$$

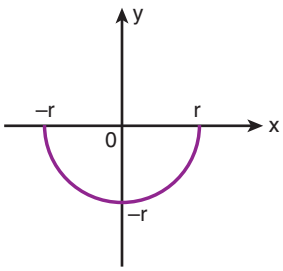
YANINDA BULUNSUN

$x^2 + y^2 = r^2$ merkezil çemberinde x ve y değişkenlerini ayrı ayrı yalnız bırakalım.

$$y = \mp\sqrt{r^2 - x^2}$$

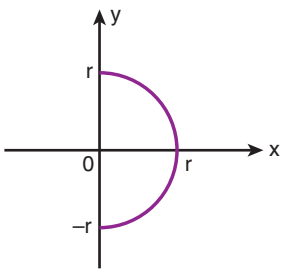
$$y = +\sqrt{r^2 - x^2} \qquad y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

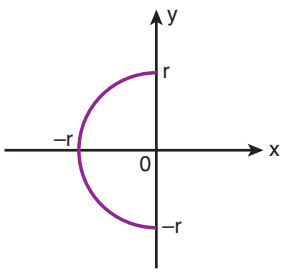




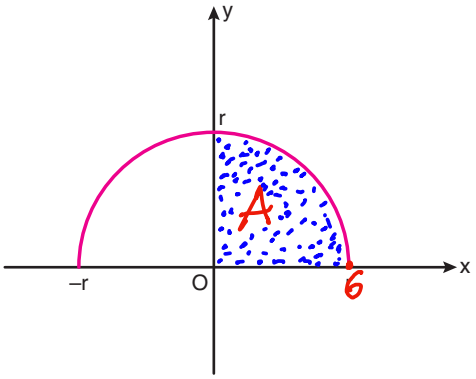
$$x = \mp\sqrt{r^2 - y^2}$$

$$x = +\sqrt{r^2 - y^2} \qquad x = -\sqrt{r^2 - y^2}$$





ÖRNEK 32.



Yukarıda $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ yarım çember denklemi verilmiştir.

Buna göre, $\int_0^6 \sqrt{36 - x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

$\int_0^6 \sqrt{36-x^2}\,dx = A$

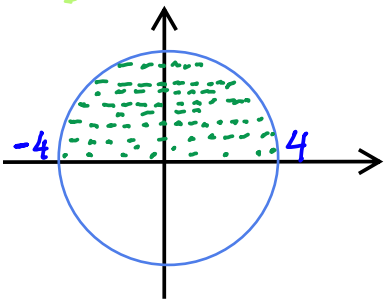
$A = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} \Rightarrow A = 9\pi$

ÖRNEK 33.

$\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM



$\frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 8\pi$

ÖRNEK 34.

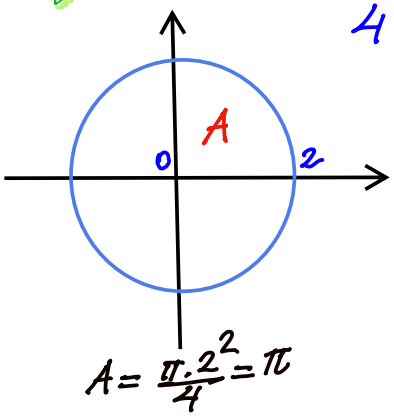
$\int_0^2 (2x - \sqrt{4 - x^2})\,dx = \int_0^2 2x\,dx - \underbrace{\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx}_{A}$

integralinin değeri kaçtır?

$x^2\big|_0^2 - A$

$4 - \pi$

ÇÖZÜM



$A = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$

ÖRNEK 35.

$\int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4 - x^2} - x)\,dx$

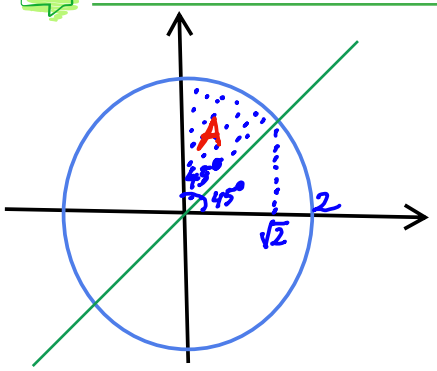
integralinin değeri kaçtır?

$(\sqrt{4-x^2})^2 = (x)^2$

$4 - x^2 = x^2$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2}$

ÇÖZÜM

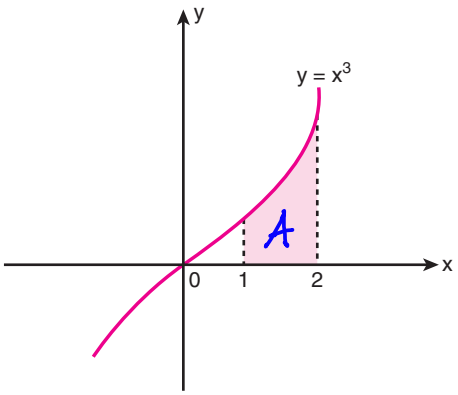


$A = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{2}$

32. 9π	33. 8π	34. $4 - \pi$	35. $\frac{\pi}{2}$

AÇIL MATEMATİK

1.



Şekilde, $y = x^3$ eğrisinin grafiği verilmiştir.

Buna göre, şekildeki taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $\frac{7}{4}$ B) $\frac{15}{4}$ C) $\frac{19}{4}$ D) $\frac{21}{4}$ E) $\frac{25}{4}$

$A = \int_1^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

2. $f(x) = x^2 - 2x$

fonksiyonunun grafiği ile x ekseni arasında kalan kapalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

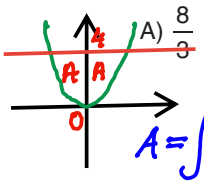
A) $\frac{4}{3}$ B) $\frac{5}{3}$ C) 2 D) $\frac{8}{3}$ E) 3

$-\int_0^2 (x^2-2x)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2$

$= -\frac{8}{3} + 4$

$= \frac{4}{3}$

3. **$f(x) = x^2$ eğrisi ile y = 4 doğrusu arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

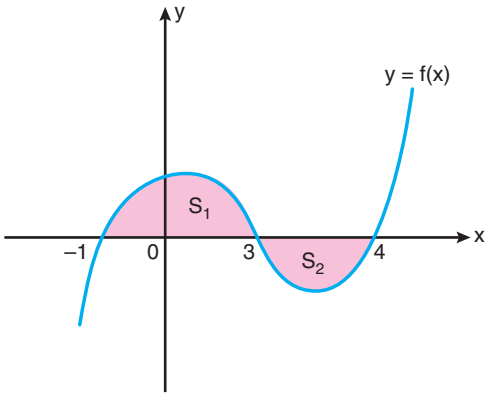


A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{20}{3}$ D) $\frac{28}{3}$ E) $\frac{32}{3}$

$A = \int_0^4 \sqrt{y}\,dy = \frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{16}{3}$

$2A = \frac{32}{3}$

4.



Şekilde f(x) fonksiyonu ve x ekseni arasında kalan bölgelerin alanları;

S_1 = 9 birimkare

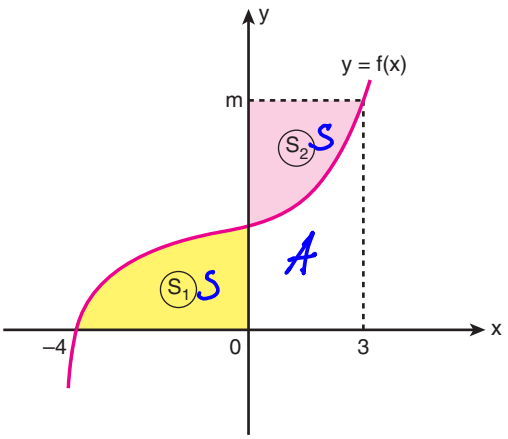
S_2 = 4 birimkaredir.

Buna göre, $\int_{-1}^{4} f(x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 13

$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = S_1 - S_2 = 9 - 4 = 5$

5. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$S_1 = S_2$ ve $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx = 18$ dir. $A + S = 18$

Buna göre, f(3) kaçtır?

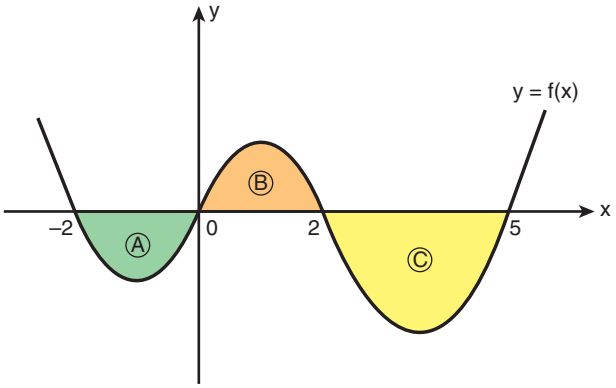
A) 4 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

$A + S = 3 \cdot m = 18 \Rightarrow m = 6$

$f(3) = 6$

ACİL MATEMATİK

6. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



A, B ve C bulundukları bölgelerin alanlarıdır.

A = 3 birimkare, B = 4 birimkare ve C = 8 birimkaredir.

Buna göre,

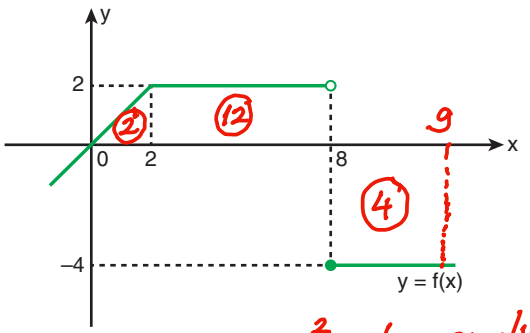
$$\int_{-2}^{2} |f(x)|dx + \int_{0}^{5} f(x)\,dx$$

toplamının değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$A+B+B-C = 3+2\cdot4-8$
$= 3$

7. Aşağıda, f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre,

$$\int_{0}^{3} x \cdot f(x^2)\,dx$$

integralinin sonucu kaçtır?

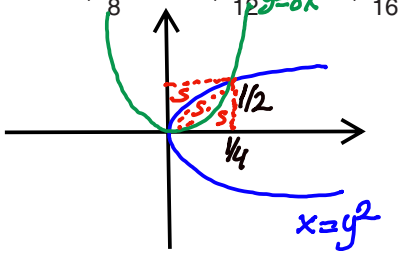
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

$u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$
$x=0 \Rightarrow u=0$
$x=3 \Rightarrow u=9$

$\int_0^9 f(u)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\left[\int_0^9 f(x)\,dx\right]$
$= \frac{1}{2}(2+12-4)$
$= 5$

8. **$x = y^2$ eğrisi ile $y = 8x^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanı kaç birimkaredir?**

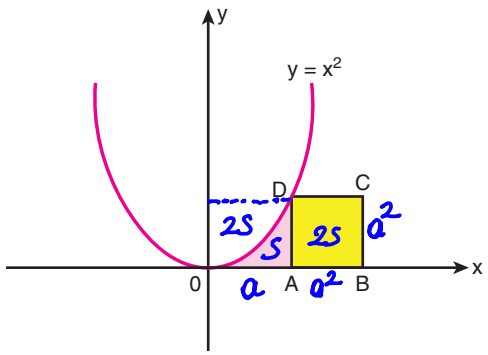
A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{12}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{32}$



$x = (8x^2)^2$
$x = 64x^4$
$x^3 = \frac{1}{64}$
$x = 1/4$

$3S = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{24}$

9.



Yukarıdaki şekilde $y = x^2$ parabolü, x ekseni ve ABCD dikdörtgeninin bir kenarı ile sınırlı olan pembe renkli bölgenin alanı, ABCD karesinin alanının yarısına eşittir.

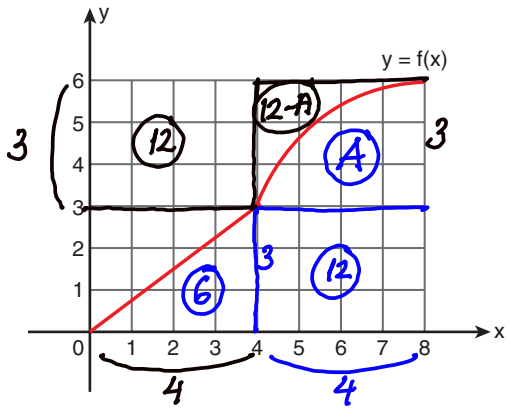
Buna göre, A noktasının apsisi kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 2

$3S = a\cdot a^2$, $2S = a^2\cdot a^2$
$S = \frac{a^3}{3}$ $S = \frac{a^4}{2}$
$\frac{a^3}{3} = \frac{a^4}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

AÇIL MATEMATİK

10. Aşağıda, y = f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



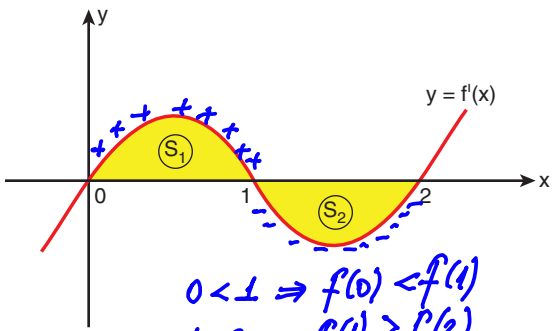
$\int_0^8 f(x)\,dx = 26 \Rightarrow 6+12+A=26$
$A=8$

olduğuna göre, $\int_3^6 f^{-1}(x)\,dx$ integralinin sonucu kaçtır?

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 20

$\int_3^6 f^{-1}(x)\,dx = 12+12-A$ (A → 8)
$= 16$

11. Aşağıda, f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



$S_1 = S_2$ dir.

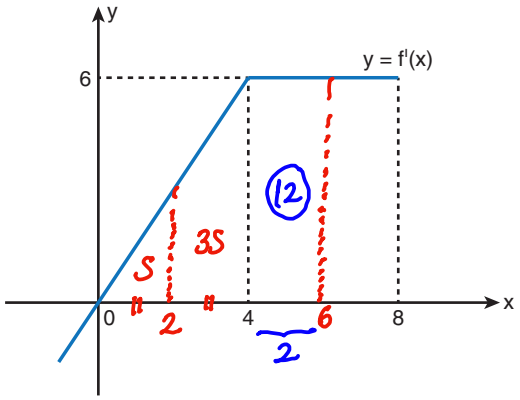
$0<1 \Rightarrow f(0)<f(1)$
$1<2 \Rightarrow f(1)>f(2)$

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) f(0) < f(1) < f(2) B) f(2) < f(0) < f(1)
C) f(2) = f(0) < f(1) D) f(1) = f(0) < f(2)
E) f(1) < f(2) = f(0)

$\int_0^1 f'(x)\,dx = -\int_1^2 f'(x)\,dx$
$f(1)-f(0) = f(1)-f(2) \Rightarrow f(0)=f(2)$
$f(2)=f(0)<f(1)$

12. Aşağıda, f fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.



Buna göre, f(6) – f(2) farkı kaçtır?

A) 15 B) 18 C) 21 D) 23 E) 25

$4S = \frac{4\cdot 6}{2} \Rightarrow S=3 \Rightarrow 3S=9$

$\int_2^6 f'(x)\,dx = 9+12$

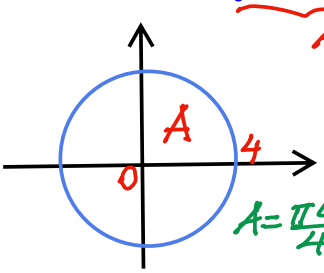
$f(6)-f(2)=21$

13. $\int_0^4 \left(4-\sqrt{16-x^2}\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

A) 8 – π B) 12 – 2π C) 16 – 2π
D) 16 – 4π E) 12 – π

$4x\Big|_0^4 - \int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = 16-A$
$A = 16-4\pi$



$A = \frac{\pi 4^2}{4} = 4\pi$

1. B	2. A	3. E	4. D	5. C	6. C	7. D
8. D	9. B	10. C	11. C	12. C	13. D	

1. $y = x^2 - x$ ve $y = 1 - x^2$

eğrileri arasında kalan bölgenin alanı kaç birimkare-dir?

A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{9}{8}$ D) 1 E) $\frac{3}{4}$

$x^2 - x = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

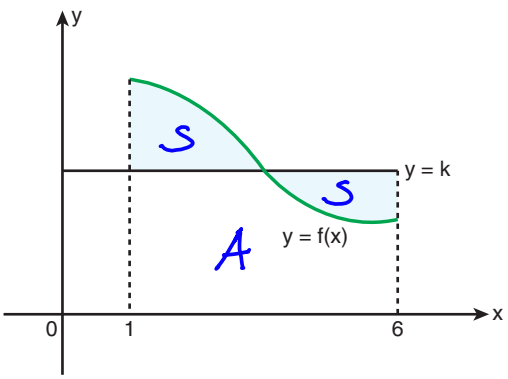
$2x \rightarrow -1$

$x \rightarrow +1$

$x = -\frac{1}{2}$ $x = 1$

$\left| \int_{-1/2}^{1} (2x^2 - x - 1)\,dx \right| = \frac{9}{8}$

2. k pozitif bir gerçel sayı olmak üzere, dik koordinat düzlemi-nde, y = k doğrusu ile y = f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekildeki boyalı bölgelerin alanları birbirine eşittir.

$\int_1^6 f(x)\,dx = 20 \Rightarrow A + S = 20$

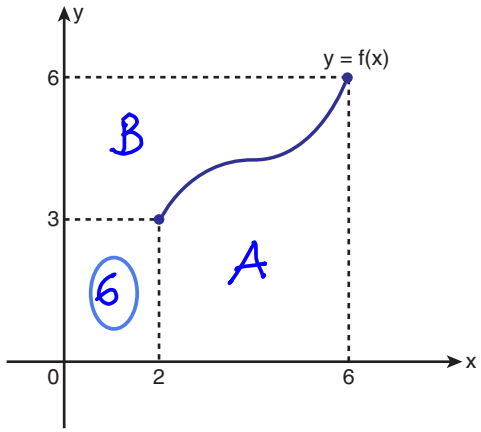
olduğuna göre, k değeri kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$A + S = 20 = 5 \cdot k$

$k = 4$

3. Aşağıda [2, 6] aralığında tanımlı olan f fonksiyonunun gra-fiği verilmiştir.



Buna göre,

$\int_2^6 f(x)\,dx + \int_3^6 f^{-1}(x)\,dx = A + B$

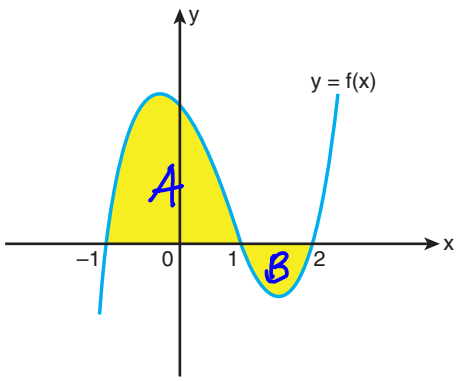
toplamının değeri kaçtır?

A) 30 B) 28 C) 26 D) 24 E) 20

$A + B + 6 = 6 \cdot 6$

$A + B = 30$

4. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$\int_{-1}^{2} |f(x)|\,dx = 2 \cdot \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 8$

Buna göre, $\int_1^2 f(x)\,dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

A) –6 B) –4 C) –2 D) 2 E) 4

$A + B = 2 \cdot (A - B) = 8$

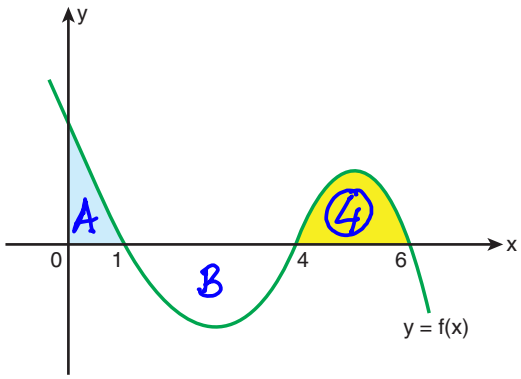
$A + B = 8$ $A = 6$

$A - B = 4$ $B = 2$

$\int_1^2 f(x)\,dx = -2$

AÇIL MATEMATİK

5.



$\int_1^6 |f(x)|dx = 10 \Rightarrow B+4=10 \Rightarrow B=6$

$\int_0^4 f(x)dx = -4$ ve sarı renkli bölgenin alanı alanı 4 birimkaredir. $\Rightarrow A-B=-4$

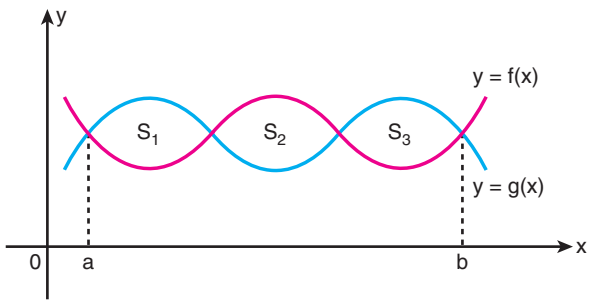
Buna göre, mavi renkli bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

$A-B=-4 \Rightarrow A-6=-4$

$A=2$

6.



$S_1 = 10\ cm^2$, $S_2 = 9\ cm^2$ ve $S_3 = 12\ cm^2$ dir.

olduğuna göre,

$\int_a^b (f(x)-g(x))dx = -S_1+S_2-S_3$

integralinin sonucu kaçtır?

A) –15 B) –13 C) –12 D) –10 E) –9

$-10+9-12=-13$

7. a < b olmak üzere,

$\int_a^b (4x-x^2)dx$

$4x-x^2=0$

$x=0, x=4$

$a=0, b=4$

ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

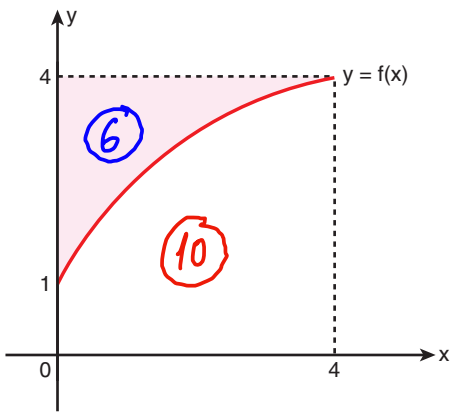
A) $\frac{20}{3}$ B) $\frac{32}{3}$ C) $\frac{35}{3}$ D) $\frac{40}{3}$ E) $\frac{64}{3}$

$\int_0^4 (4x-x^2)dx = \left(4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4$

$= 32-\frac{64}{3}$

$= \frac{32}{3}$

8.



Yukarıda verilen f fonksiyonunun grafiğine göre, taralı alan 6 birimkaredir.

Buna göre,

$\int_0^2 f(2x)dx$

$u=2x \Rightarrow du=2.dx$

$x=0 \Rightarrow u=0$

$x=2 \Rightarrow u=4$

integralinin değeri kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

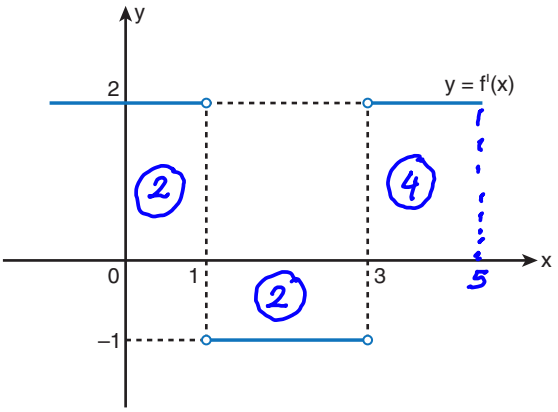
$\int_0^4 f(u)\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^4 f(x)dx$

$= \frac{1}{2}\cdot 10$

$= 5$

AÇIL MATEMATİK

9.



Gerçel sayılar kümesinde sürekli olan f fonksiyonunun türevinin grafiği yukarıda gösterilmiştir.

$f(0) = 4$

olduğuna göre, f(5) kaçtır?

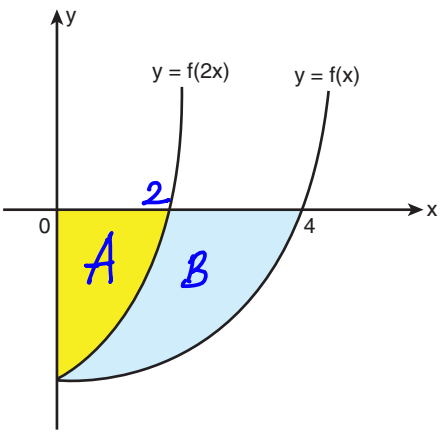
A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

$\int_0^5 f'(x)\,dx = 2-2+4$

$f(x)\Big|_0^5 = f(5)-f(0) = 4$

$f(5) = 8$

10. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere, aşağıda $y = f(x)$ ve $y = f(2x)$ fonksiyonlarının grafiği gösterilmiştir.



$\int_0^4 f(x)\,dx = -6$

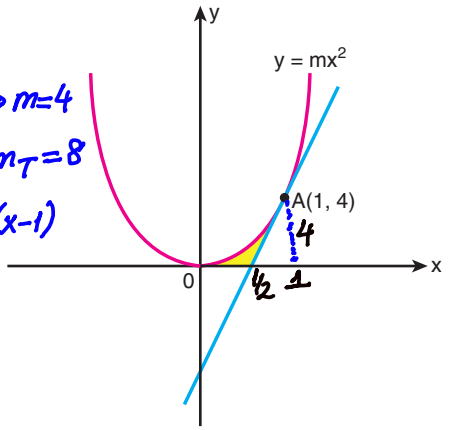
Buna göre, mavi renkli bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 12

$A = -\int_0^2 f(2x)\,dx = -\int_0^4 f(u)\,\frac{du}{2}$

$A = -\frac{1}{2}\cdot(-6) = 3 \qquad A+B = 6 \Rightarrow B = 3$

11.



$m \cdot 1^2 = 4 \Rightarrow m = 4$

$y' = 8x \Rightarrow m_T = 8$

$y - 4 = 8\cdot(x-1)$

$y = 8x - 4$

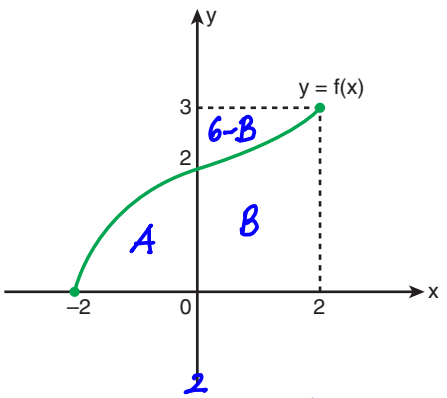
Şekilde, $y = mx^2$ parabolü ve A(1, 4) noktasındaki teğeti verilmiştir.

Buna göre, taralı alan kaç birimkaredir?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) 1

$\int_0^1 4x^2\,dx - \frac{4\cdot 1/2}{2} = \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 - 1 = \frac{1}{3}$

12. Aşağıda, [–2, 2] aralığında tanımlı f fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



$\int_{-1}^{1} f(2x)\,dx = 5 \Rightarrow \int_{-2}^{2} f(u)\cdot\frac{du}{2} = 5$

$A + B = 10$

eşitliği veriliyor.

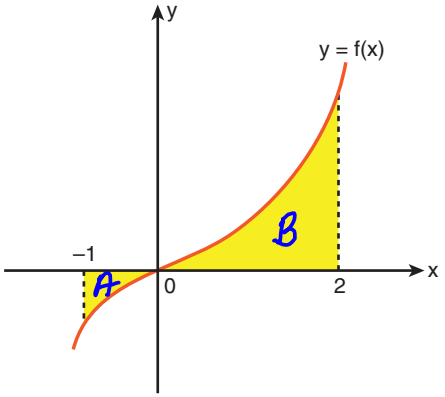
Buna göre, $\int_0^3 f^{-1}(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) –10 B) –8 C) –6 D) –5 E) –4

$\int_0^3 f^{-1}(x)\,dx = -A + 6 - B = 6 - 10 = -4$

1. C	2. D	3. A	4. C	5. B	6. B
7. B	8. C	9. A	10. B	11. C	12. E

1. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



$a = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \Rightarrow a = -A + B$

$b = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx \Rightarrow b = -A$

olduğuna göre, boyalı bölgelerin alanları toplamının a ve b cinsinden eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

A) a + b B) a – b C) a + 2b D) 2a – b E) a – 2b

$a = b + B \Rightarrow B = a - b$

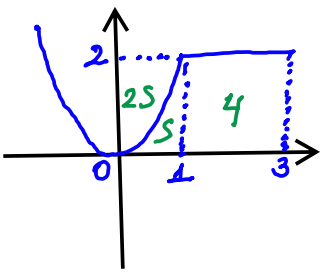
$A + B = -b + a - b = a - 2b$

2. $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

fonksiyonu ve x ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı kaç birimkaredir?

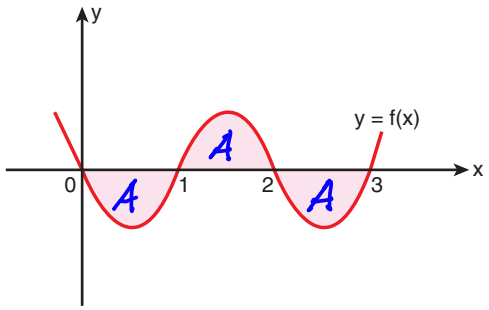
A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{14}{3}$ D) $\frac{16}{3}$ E) $\frac{20}{3}$



$3S = 2 \Rightarrow S = \frac{2}{3}$

$4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$

3. Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



Boyalı bölgelerin alanları birbirine eşittir.

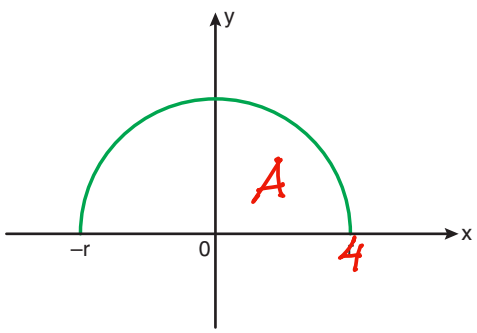
$\int_{0}^{3} |f(x)|\,dx = 9$ dur. $3A = 9 \Rightarrow A = 3$

Buna göre, $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) –6 B) –3 C) 0 D) 3 E) 6

$\int_{0}^{3} f(x)\,dx = -A + A - A = -3$

4.



Yukarıdaki yarım çemberin denklemi $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dir.

Buna göre,

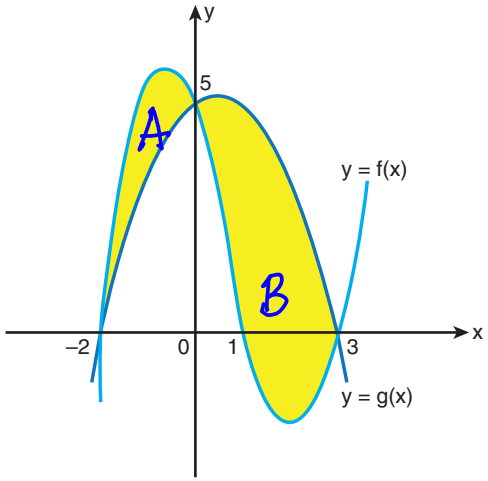
$A = \int_{0}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} = 4\pi$

integralinin değeri kaçtır?

A) 2π B) $\frac{5\pi}{2}$ C) 4π D) $\frac{9\pi}{2}$ E) 6π

ACİL MATEMATİK

5. Aşağıda, f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Buna göre, boyalı bölgelerin alanları toplamını veren ifade aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\int_{-2}^{3} [f(x) - g(x)]dx$

B) $\int_{-2}^{0} [g(x) - f(x)]dx + \int_{0}^{3} [f(x) - g(x)]dx$

C) $\int_{-2}^{3} [g(x) - f(x)]dx$

D) $\int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{3} [g(x) - f(x)]dx$

E) $\int_{-2}^{3} [f(x) + g(x)]dx$

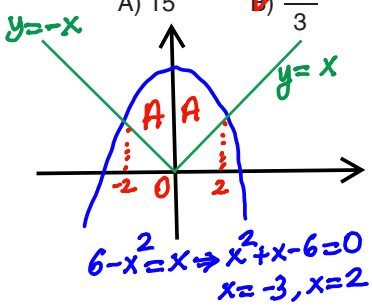
$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx$

$B = \int_{0}^{3} [g(x) - f(x)]dx$

6. $y = 6 - x^2$

parabolü ile y = |x| fonksiyonunun sınırladığı alan kaç birimkaredir?

A) 15 B) $\frac{44}{3}$ C) 14 D) $\frac{40}{3}$ E) 12



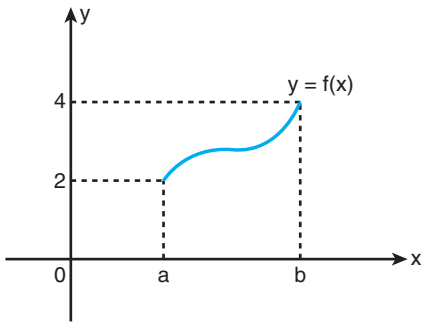
$6 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$

$x = -3, x = 2$

$A = \int_{0}^{2} (6 - x^2 - x)dx = \frac{22}{3}$

$2A = \frac{44}{3}$

7.



Yukarıda, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre,

$\int_{a}^{b} f(x) \cdot f'(x)\,dx$

$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x).dx$

$x = a \Rightarrow u = 2$

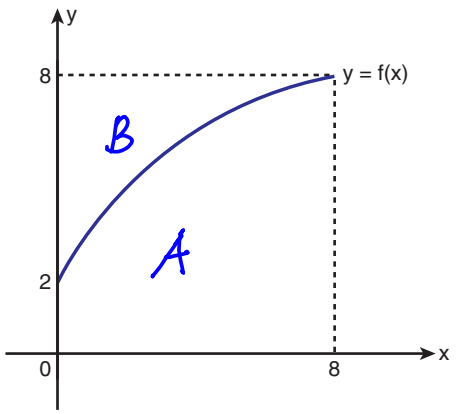
$x = b \Rightarrow u = 4$

integralinin değeri kaçtır?

A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 16

$\int_{2}^{4} u\,du = \frac{u^2}{2}\Big|_2^4 = 8 - 2 = 6$

8.



Yukarıda f fonksiyonunun [0, 8] aralığındaki grafiği gösterilmiştir.

$\int_{0}^{2} f(4x)\,dx = 10$ dur.

$u = 4x \Rightarrow du = 4.dx$

$\int_{0}^{8} f(u)\frac{du}{4} = 10 \Rightarrow A = 40$

Buna göre, $\int_{1}^{4} f^{-1}(2x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

$\int_{2}^{8} f^{-1}(u)\frac{du}{2} = \frac{B}{2} = 12$

$A + B = 8.8$

$B = 24$

9. $\int_0^2 \left(\sqrt{4-x^2}+x\right)dx$

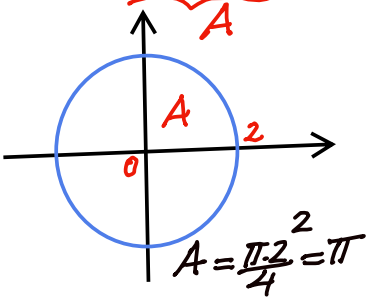
toplamının değeri kaçtır?

A) π B) $\pi+2$ C) $\pi+4$ D) 2π E) $2\pi+2$

$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx + \int_0^2 x\,dx = A + \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$

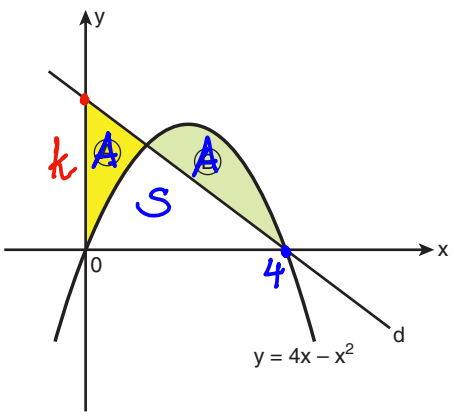
$= A + 2$

$= \pi + 2$



$A = \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = \pi$

10. Aşağıda, $y = 4x - x^2$ eğrisi ile d doğrusunun grafiği gösterilmiştir.



A = B olduğuna göre, d doğrusunun eğimi kaçtır?

A) $\frac{-5}{3}$ B) $\frac{-4}{3}$ C) -1 D) $\frac{-3}{4}$ E) $\frac{-2}{3}$

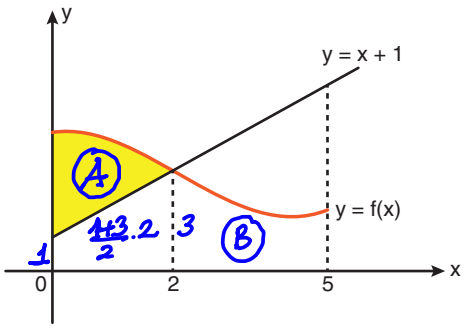
$A + S = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4$

$A + S = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = \frac{k \cdot 4}{2}$

$k = \frac{16}{3}$

$m_d = -\frac{16/3}{4} = -\frac{4}{3}$

11.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun ve y = x + 1 doğrusunun grafiği verilmiştir.

$\int_0^5 f(x)\,dx = 18$ ve $\int_1^4 f(x+1)\,dx = 8 \Rightarrow \int_2^5 f(x)\,dx = 8$

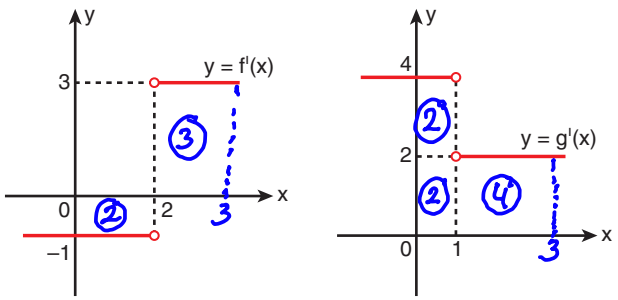
olduğuna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

$A + 4 + B = 18 \qquad B = 8$

$A + 12 = 18 \Rightarrow A = 6$

12. Aşağıda gerçel sayılar kümesinde sürekli olan f ve g fonksiyonlarının türevlerinin grafikleri verilmiştir.



f(0) = g(0) olduğuna göre, g(3) – f(3) farkının sonucu kaçtır?

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

$\int_3^3 f'(x)\,dx = -2 + 3$

$-f(3) - f(0) = 1 \quad \ldots (1)$

$\int_0^3 g'(x)\,dx = 2 + 2 + 4$

$g(3) - g(0) = 8 \quad \ldots (2)$

1. E	2. C	3. B	4. C	5. D	6. B
7. A	8. C	9. B	10. B	11. D	12. C

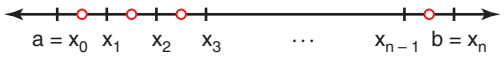
(1) ve (2) den $g(3) - f(3) = 7$

AÇIL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

Bir Aralığın Bölüntüsü

Bir [a, b] aralığını n eş parçaya bölelim.



$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$

kümesine **"[a, b] Aralığının Düzgün Bölüntüsü"** denir.

$|ax_1| = |x_1x_2| = ... = |x_{n-1}b|$ uzunlukları eşittir.

Her bir aralığın uzunluğu $\Delta_{x_k} = \frac{b-a}{n}$ dir.

ÖRNEK

[1, 10] aralığını 3 eş parçaya bölen aralıkları bulalım.

ÇÖZÜM

$n = 3, a = 1, b = 10$

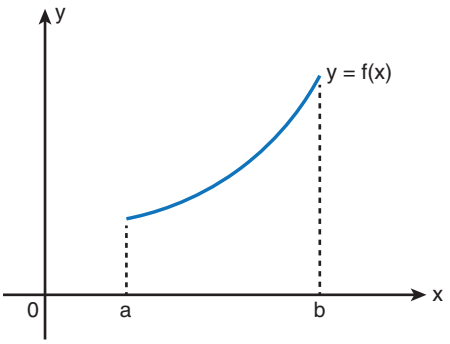
$\Delta_x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{3} = \frac{9}{3} = 3$

aralıklar [1, 4], [4, 7], [7, 10] dur.

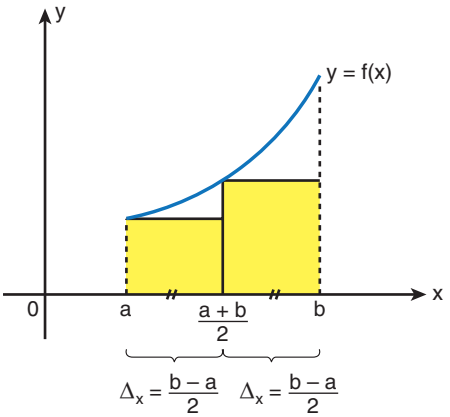
YANINDA BULUNSUN

Riemann Alt Toplamı

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere, f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olsun.



[a, b] aralığını 2 eşit alt aralığa ayırıp bu alt aralıkları bir kenar olarak kabul eden ve yükseklikleri sırasıyla f(a) ve $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olan dikdörtgenleri çizelim.



Riemann Alt Toplamı = Sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı

$= \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot f(a) + \left(\frac{b-a}{2}\right) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ olur.

Not : Dikdörtgenlerin yükseklikleri, alt aralıkların küçük değerlerine eşit olur.

Yani, [a, b] aralığı n tane eşit uzunluktaki alt aralığa bölündüğünde aralıklar;

$[a, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_{n-1}, b]$

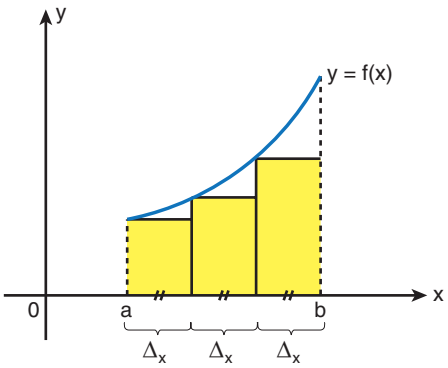
olmak üzere,

Riemann alt toplamı $= \frac{b-a}{n} \cdot [f(a) + f(a_1) + ... + f(a_{n-1})]$

şeklinde olur.

AÇIL MATEMATİK

[a, b] aralığını 3 eşit alt aralığa bölerek aynı işlemi yapalım.

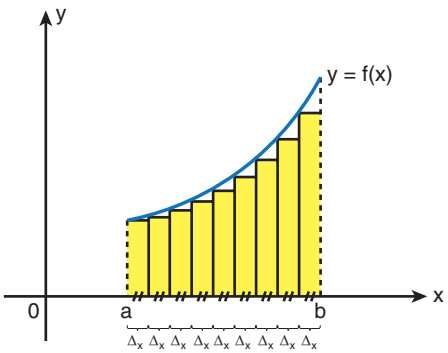


$\Delta_x = \frac{b-a}{3}$ tür.

Riemann Alt Toplamı = Sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$= \left(\frac{b-a}{3}\right)\cdot f(a) + \left(\frac{b-a}{3}\right)\cdot f\left(a+\frac{b-a}{3}\right) + \left(\frac{b-a}{3}\right)\cdot f\left(a+2\cdot\left(\frac{b-a}{3}\right)\right)$$

[a, b] aralığını şimdi de 9 eşit alt aralığa bölelim.



$\Delta_x = \frac{b-a}{9}$ dur.

Riemann Alt Toplamı = Sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$= \left(\frac{b-a}{9}\right)\cdot f(a) + \left(\frac{b-a}{9}\right)\cdot f\left(a+\frac{b-a}{9}\right) + \left(\frac{b-a}{9}\right)\cdot f\left(a+\frac{2\cdot(b-a)}{9}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{b+a}{9}\right)\cdot f\left(a+\frac{8\cdot(b-a)}{9}\right)$$

Dikkat edersek eşit olan alt aralıkların sayısı arttıkça sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı büyümektedir.

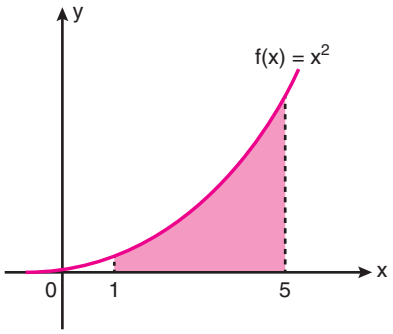
$n \to \infty$ için [a, b] aralığı n tane eşit alt aralığa bölünürse oluşturulan dikdörtgenlerin alanları toplamı, f eğrisiyle x ekseni arasında kalan alana eşit olacaktır.

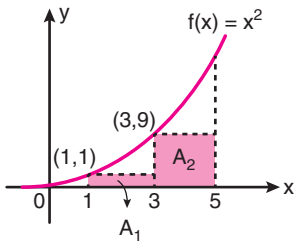
Yani, $n \to \infty$ için n tane eşit alt aralıkla hesaplanan Riemann alt toplamına A dersek.

$$A = \int_a^b f(x)\,dx \text{ olur.}$$

Örneğin;

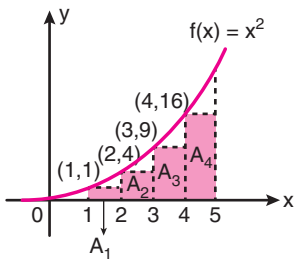
$f(x) = x^2$ fonksiyonu için anlattıklarımızı özetleyelim.



- 

[1, 5] aralığını 2 eş parçaya bölerek Riemann alt toplamını bulalım.

$A_1 + A_2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 9 = 2 + 18 = 20$ br^2

- 

[1, 5] aralığını 4 eş parçaya bölerek Riemann alt toplamını bulalım.

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 = 30$ br^2

[1, 5] aralığını 8 parçaya böldüğümüzde bir aralığın uzunluğu

$$\Delta_x = \frac{5-1}{8} = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

Dikdörtgenlerin alanları toplamı:

$$A = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} + 9 + \frac{49}{4} + 16 + \frac{81}{4}\right] = 35{,}5 \text{ br}^2$$

AÇIL MATEMATİK

Dikkat edersek,

$$\int_1^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3} = 41,\overline{3}$$

Yani, eğrinin x ekseniyle arasında kalan alan,

$= 41,\overline{3}$ birimkaredir.

Az önce Riemann alt toplamı yardımıyla bulduğumuz cevaplar sırasıyla,

20, 30 ve 35,5 birimkareydi.

$20 < 30 < 35,5 < \underbrace{41,\overline{3}}_{\text{Gerçek alan}}$

Dikdörtgen sayısını arttırdığımızda Riemann alt toplamları büyümekte ve gerçek alan değerine yaklaşmaktadır.

Sonuç;

Riemann Alt Toplamı $\le \int_a^b f(x)dx$ tir.

ÖRNEK

$f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 + x + 2$

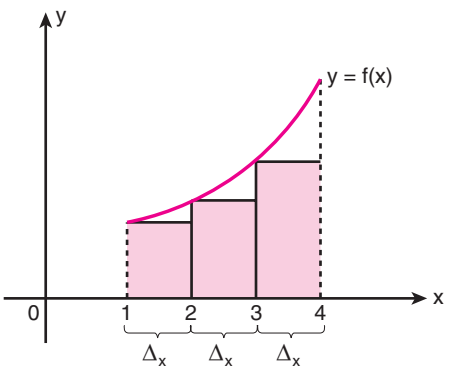
fonksiyonu veriliyor.

[1, 4] aralığı 3 eşit alt aralığa bölünerek f fonksiyonu için Riemann alt toplamı hesaplanıyor.

Buna göre, elde edilen sonucu bulunuz.

ÇÖZÜM

[1, 4] aralığında f fonksiyonunun grafiğini çizelim.



$\Delta_x = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ dir.

Riemann alt toplamı = Pembe dikdörtgenlerin alanları toplamı

$= 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3)$

$f(1) = 4$, $f(2) = 8$ ve $f(3) = 14$ tür.

Riemann alt toplamı = $f(1) + f(2) + f(3)$

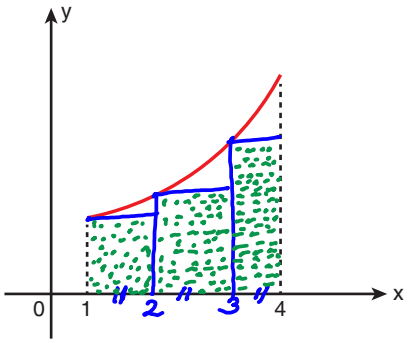
$= 4 + 8 + 14 = 26$ bulunur.

ÖRNEK 1.

Şekilde [1, 4] aralığında tanımlı,

$f(x) = x^2 + 1$

fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



[1, 4] aralığı 3 eşit alt aralığa ayrılıyor.

Buna göre, Riemann alt toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3)$

$1^2+1 \quad 2^2+1 \quad 3^2+1$

$2 + 5 + 10 = 17$

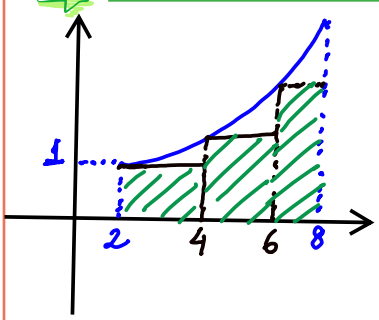
ÖRNEK 2.

f : [2, 8] aralığında tanımlı, sürekli, artan ve pozitif değerli bir fonksiyondur.

$f(2) = 1$ ve $\int_2^8 f(x)dx = 24$ tür.

Buna göre, f(4) + f(6) toplamının alabileceği en büyük tam sayı değerini bulunuz.

ÇÖZÜM



$2 \cdot f(2) + 2f(4) + 2f(6) < 24$

$\underbrace{}_{1}$

$2(f(4) + f(6)) < 22$

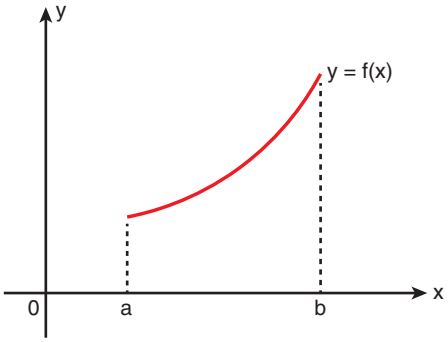
$f(4) + f(6) < 11$

1. 17	2. 10

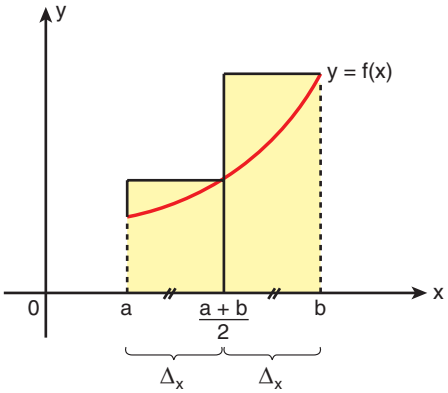
YANINDA BULUNSUN

Riemann Üst Toplamı

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere, f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi olsun.



[a, b] aralığını 2 eşit alt aralığa ayırıp bu alt aralıkları bir kenar olarak kabul eden ve yükseklikleri sırasıyla $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ve f(b) olan dikdörtgenleri çizelim.



$$\Delta_x = \frac{b-a}{2}$$

Riemann üst toplamı = Sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$= \left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)\cdot f(b) \text{ olur.}$$

Not : Dikdörtgenlerin yükseklikleri, alt aralıkların büyük değerlerine eşit olur.

Yani, [a, b] aralığı n tane eşit uzunluktaki alt aralığa bölündüğünde aralıklar;

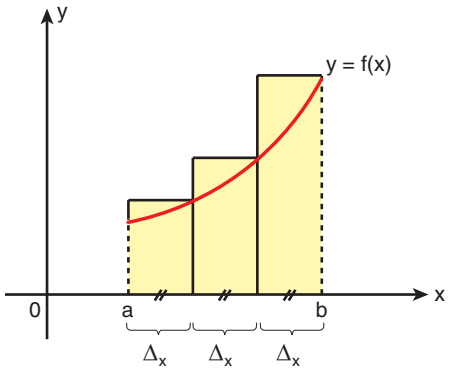
$[a, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_{n-1}, b]$

olmak üzere,

$$\text{Riemann üst toplamı} = \frac{b-a}{n} \cdot [f(a_1) + f(a_2) + ... + f(b)]$$

şeklinde olur.

[a, b] aralığını 3 eşit alt aralığa bölerek aynı işlemi yapalım.



$$\Delta_x = \frac{b-a}{3}$$

Riemann üst toplamı = Sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı

$$= \left(\frac{b-a}{3}\right)\cdot f\left(a+\frac{b-a}{3}\right) + \left(\frac{b-a}{3}\right)\cdot f\left(a+2\cdot\left(\frac{b-a}{3}\right)\right) + \underbrace{\left(\frac{b-a}{3}\right)\cdot f\left(a+3\cdot\left(\frac{b-a}{3}\right)\right)}_{b} \text{ olur.}$$

Birbirine eşit olan alt aralıkların sayısı arttıkça sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı azalmaktadır.

$n \to \infty$ için [a, b] aralığı n tane eşit alt aralığa bölünürse oluşturulan dikdörtgenlerin alanları toplamı, f eğrisiyle x ekseni arasında kalan alana eşit olacaktır.

Yani, $n \to \infty$ için n tane eşit alt aralıkla hesaplanan Riemann üst toplamına B dersek;

$$B = \int_a^b f(x)\,dx \text{ olur.}$$

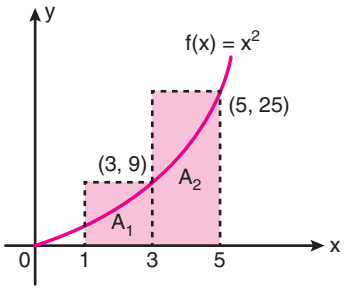
Sonuç;

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, [a, b] aralığı n tane eşit alt aralığa bölünerek oluşturulan dikdörtgenler yardımıyla hesaplanan Riemann alt toplamı A ve Riemann üst toplamı B olsun.

Bu durumda;

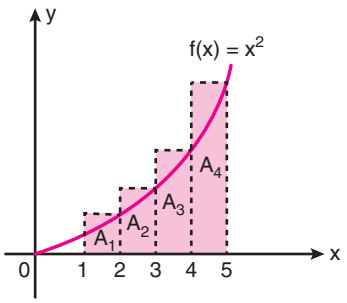
$$A \le \int_a^b f(x)\,dx \le B \text{ olur.}$$

ACİL MATEMATİK

- 

[1, 5] aralığını 2 parçaya bölen şekildeki dikdörtgenlerin alanlarını hesaplayalım.

$A_1 + A_2 = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 25 = 68$ br²

- 

[1, 5] aralığını 4 eş parçaya bölen şekildeki dikdörtgenlerin alanlarını hesaplayalım.

$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 25 = 54$ br²

- [1, 5] aralığını 8 parçaya bölerek dikdörtgenlerin alanlarını hesaplayalım.

$$\Delta_{x_k} = \frac{5-1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4} + 9 + \frac{49}{4} + 16 + \frac{81}{4} + 25\right]$$

$A = 47{,}5$ br²

Bir [a, b] aralığında $n \to \infty$'a giderken şekildeki tüm dikdörtgenlerin alanları toplamına **"Üst Toplam"** denir. Ü(F) ile gösterilir.

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi aralıklar çoğaldıkça dikdörtgenlerin alanları toplamı eğri altındaki alana yaklaşacaktır.

$n \to \infty$'a giderken limit durumunda dikdörtgenlerin alanları toplamı eğri altındaki alanı verecektir.

Eğri altındaki alana A dersek,

$$\lim_{n\to\infty} A(F) \le A \le \lim_{n\to\infty} Ü(F)$$

Sıkıştırma kuralından,

$$\lim_{n\to\infty} A(F) = \lim_{n\to\infty} Ü(F) = A \text{ dır.}$$

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun [1, 5] aralığında x ekseniyle sınırladığı alan,

$$\int_1^5 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^5 = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3} = 41{,}\overline{3}$$

Yukarıda hesapladığımız Riemann üst toplam integralleri 2 eşit alt aralık için 68, 3 eşit alt aralık için 54 ve 8 eşit alt aralık için 47,5 tir.

Dikdörtgen sayısının artmasıyla Riemann üst toplamlarının azalarak gerçek alan değerine yakınsadığına dikkat ediniz.

$$68 > 54 > 47{,}5 > \underbrace{41{,}\overline{3}}$$

Gerçek alan değeri

ÖRNEK

$f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = x^3 - 1$

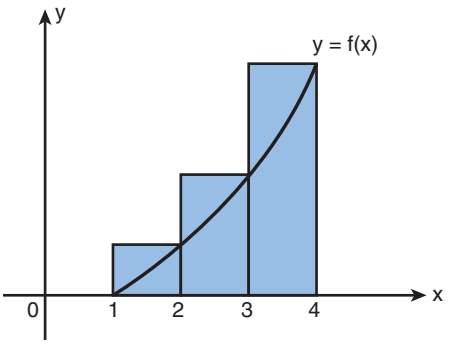
fonksiyonu veriliyor.

[1, 4] aralığı 3 eşit alt aralığa bölünerek f fonksiyonu için Riemann üst toplamı hesaplanıyor.

Buna göre, elde edilen sonucu bulunuz.

ÇÖZÜM

[1, 4] aralığında $f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



Riemann üst toplamı = Mavi dikdörtgenlerin alanları toplamı
$= 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4)$
$= 7 + 26 + 63$
$= 96$ bulunur.

ÖRNEK 3.

$f(x) = 16 - x^2$

fonksiyonunun [0, 3] aralığı 3 eşit alt aralığa bölünerek bu aralıklar için Riemann üst toplamı A ve Riemann alt toplamı B olarak hesaplıyor.

Buna göre, A – B farkı kaçtır?

ÇÖZÜM

$B = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3)$
$= 15 + 12 + 7$
$= 34$

$A = 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2)$
$= 16 + 15 + 12$
$= 43$

$A - B = 43 - 34 = 9$

YANINDA BULUNSUN

Riemann Orta Toplamı (Riemann Toplamı)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonu için alt aralıkların orta noktalarına göre yükseklikleri belirlenen dikdörtgenlerin alanlarının toplamı Riemann orta toplamını verir.

ÖRNEK

$f : [0, 6] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = 2x^2 + 1$

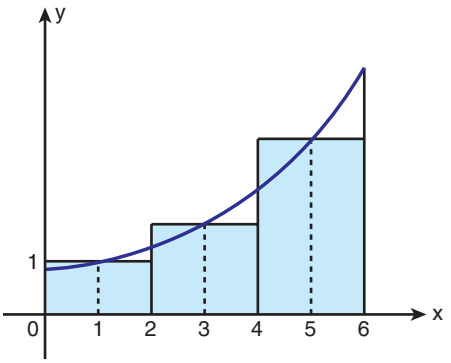
fonksiyonu veriliyor.

[0, 6] aralığı eşit uzunlukta 3 alt aralığa bölünüyor.

Buna göre, oluşan eş alt aralıkların her birinin orta noktaları yardımıyla elde edilen Riemann orta toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

[0, 6] aralığında $f(x) = 2x^2 + 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



3 eşit uzunluktaki aralıklarımız; [0, 2], [2, 4] ve [4, 6] dır.

Bu aralıkların orta noktaları;

[0, 2] için orta nokta 1

[2, 4] için orta nokta 3 ve

[4, 6] için orta nokta 5'tir.

Oluşan dikdörtgenlerin yükseklikleri sırasıyla bu orta noktaların fonksiyondaki görüntüleri, yani f(1), f(3) ve f(5) olur.

O halde, Riemann toplamı (Riemann orta toplamı)

$= 2 \cdot f(1) + 2 \cdot f(3) + 2 \cdot f(5)$

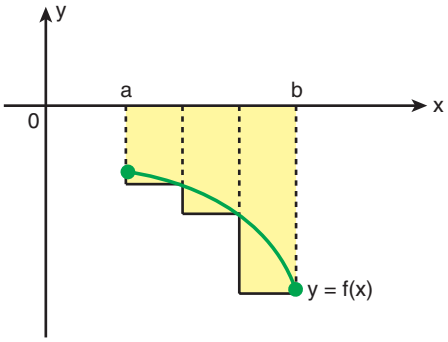
$= 2 \cdot 3 + 2 \cdot 19 + 2 \cdot 51$

$= 6 + 38 + 102 = 146$ bulunur.

3. 9

NOT

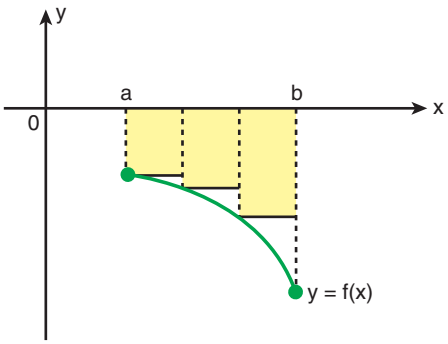
Negatif değerli fonksiyonlar için Riemann alt ve üst toplam sonuçları negatif çıkacaktır.



f fonksiyonu için [a, b] aralığı 3 eşit uzunlukta alt aralığa ayrılıp Riemann alt toplamı hesaplanmak istenirse;

A = Riemann alt toplamı ve S = Sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı olmak üzere,

$$A = -S \text{ ve } A \le \int_a^b f(x)\,dx \text{ olur.}$$



Aynı koşullarda Riemann üst toplamı hesaplanmak istenirse,

B = Riemann üst toplamı ve S = Sarı dikdörtgenlerin alanları toplamı olmak üzere;

$$B = -S \text{ ve } \int_a^b f(x)\,dx \le B \text{ olur.}$$

YANINDA BULUNSUN

İntegralin Fiziksel Yorumu

Bir hareketlinin yol denkleminin türevinin hız denklemini, hız denkleminin türevinin ivme denklemini verdiğini türev konusunda gördük.

O halde, integral (ters türev) konusunda yukarıdaki cümlenin tam tersi geçerli olacaktır.

V : Hız, **t : Zaman**, **a : İvme**, **S : Alınan Yol** olmak üzere,

- Hızı V olan bir hareketlinin t zamanına bağlı yol denklemi,

$$S = \int V(t)\,dt$$

- a ivmesi ile hareket eden bir cismin t zamanına bağlı hız denklemi,

$$V = \int a(t)\,dt$$

- Eğer hareketli, V_0 ilk hızı ile harekete başlamışsa bu hareketlinin t zamanına bağlı hız denklemi,

$$V = V_0 + \int a(t)\,dt$$

- Herhangi bir [a, b] zaman aralığındaki hareketlinin aldığı yol,

$$S = \int_a^b |V(t)|\,dt \text{ dir.}$$

- Herhangi bir [a, b] zaman aralığında hareketlinin toplam yer değiştirmesi,

$$x = \int_a^b V(t)\,dt \text{ dir.}$$

AÇIL MATEMATİK

NOT

Bir hareketli için toplam alınan yol ve toplam yer değiştirme farklı kavramlardır.

Yer değiştirme, hareket eden bir cismin ilk konumuyla son konumu arasındaki mesafeye denir.

Alınan yol ise bir hareketlinin hareketi boyunca izlediği yörüngenin toplam uzunluğudur.

Örneğin; Doğrusal hareket eden bir cisim 50 metre gittikten sonra geriye doğru 20 metre gitmiş olsun.
Toplam yer değiştirme = 50 – 20 = 30 metredir.
Alınan toplam yol = 50 + 20 = 70 metredir.

[a, b] zaman aralığında alınan toplam yol, $\int_a^b |V(t)|dt$

Toplam yer değiştirme; $\int_a^b V(t)\,dt$ dir.

Başka bir ifadeyle bir doğru boyunca hareket eden bir cismin hız – zaman grafiğinin belli bir zaman aralığında belirli integrali hareketlinin o zaman aralığındaki toplam yer değiştirmesini verir.

Hız – zaman grafiği ile x ekseni arasında kalan bölgelerin alanları toplamı ise hareketlinin aldığı toplam yolu verir.

ÖRNEK 1.

Doğrusal bir şekilde hareket eden bir hareketlinin zamana bağlı hız denklemi;

V(t) = 6 – 2t m/sn dir.

Buna göre,

a) Hareketlinin başlangıçtan itibaren ilk 4 saniyede aldığı toplam yolu bulunuz.

b) Hareketlinin başlangıçtan itibaren ilk 4 saniyedeki toplam yer değiştirmesini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $S = \int_0^4 |V(t)|dt = \int_0^4 |6-2t|dt$

integralin sınırlarını uygun bir şekilde parçalayalım.

$$S = \int_0^3 (6-2t)\,dt + \int_3^4 (2t-6)\,dt$$

$$= (6t - t^2)\Big|_0^3 + (t^2 - 6t)\Big|_3^4$$

$$= 9 + 1 = 10 \text{ metredir.}$$

b) $x = \int_0^4 V(t)\,dt$

$$= \int_0^4 (6-2t)\,dt$$

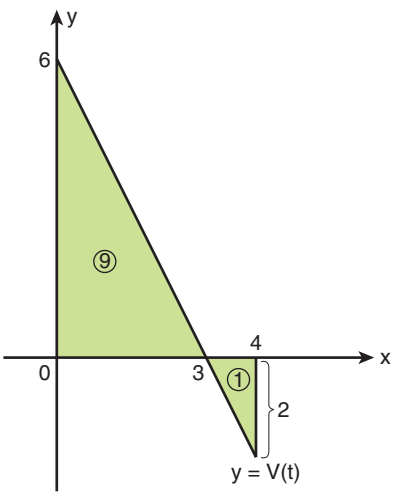
$$= (6t - t^2)\Big|_0^4$$

$$= (24 - 16) - 0$$

$$= 8 \text{ metredir.}$$

a) şıkkında çıkan cevapla b) şıkkında çıkan cevabı şöyle yorumlayabiliriz.

V(t) = 6 – 2t fonksiyonunun grafiğini çizersek;



Yeşil bölgelere dikkat edersek; cisim, 9 metre ileri ve 1 metre geri gitmiştir.

Toplam yol = 9 + 1 = 10 metre

Toplam yer değiştirme = 9 – 1 = 8 metre olur.

ACİL MATEMATİK

ÖRNEK 2.

Doğrusal bir yol boyunca hareket eden bir cismin t. saniyedeki ivmesi,

$a(t) = 3t$ m/sn^2 dir.

Cismin 1. saniyedeki hızı 5 m/sn olduğuna göre, cismin ilk 3 saniyede aldığı toplam yolu bulunuz.

ÇÖZÜM

$v(t) = \frac{3t^2}{2} + c$

$v(1) = \frac{3}{2} + c = 5 \Rightarrow c = 7/2$

$$\int_0^3 \left(\frac{3t^2}{2} + \frac{7}{2}\right)dt = \left(\frac{t^3}{2} + \frac{7}{2}t\right)\Big|_0^3$$

$$= 24 - 0$$

$$= 24$$

ÖRNEK 3.

Hep aynı yönde ilerleyen bir hareketlinin hızının t zamanına göre fonksiyonu v(t) dir ve bu hareketli [9, 16] zaman aralığında 20 birim yol almıştır.

Buna göre,

$$\int_3^4 [t \cdot v(t^2)]dt$$

integralinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$\int_9^{16} v(t)\,dt = 20$$

$$A = \int_3^4 t \cdot v(t^2)\,dt$$

$u = t^2 \Rightarrow du = 2t \cdot dt$

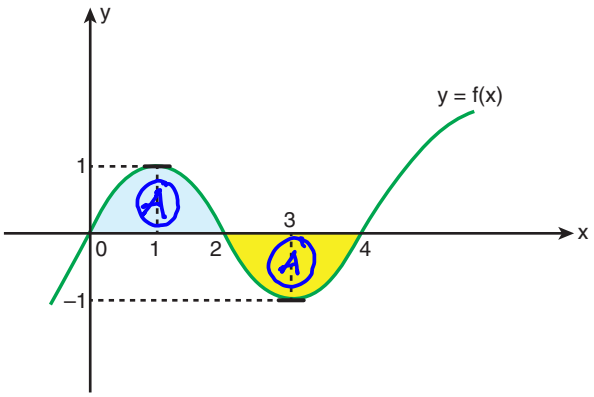
$t = 3 \Rightarrow u = 9$

$t = 4 \Rightarrow u = 16$

$$A = \int_9^{16} v(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

ÖRNEK 4.

Aşağıda, f fonksiyonunun grafiği gösterilmiştir.



Doğrusal bir yolda hareket eden bir hareketlinin konum-zaman fonksiyonu,

$S(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ metredir. $f(x) = v(t)$

Bu hareketli t. saniyede başlangıç noktasından S(t) metre uzaktadır ve şekilde gösterilen boyalı bölgelerin alanları birbirine eşittir.

Buna göre,

I. Hareketlinin 1. saniyedeki hızı 1 m/sn dir.

II. Hareketlinin 2. saniyedeki ivmesi negatiftir.

III. Hareketlinin 4. saniyede bulunduğu konum ile başlangıçta bulunduğu konum aynıdır.

öncüllerinden hangileri doğrudur?

ÇÖZÜM

I. $v(1) = f(1) = 1$

II. $a(t) = v'(t) = f'(x)$

$a(2) = v'(2) = f'(2) < 0$

III. $S(0) = \int_0^0 f(x)\,dx = 0$

$S(4) = \int_0^4 f(x)\,dx = A - A = 0$

2. 24	3. 10	4. I, II ve III

ACİL MATEMATİK

1. $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

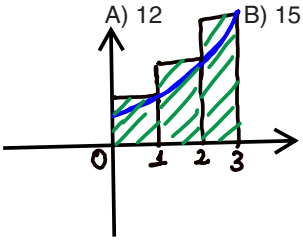
$f(x) = x^2 + 1$

fonksiyonu veriliyor.

[0, 3] aralığı 3 eşit aralığa bölünerek f fonksiyonu için Riemann üst toplamı hesaplanıyor.

Buna göre, elde edilen sonuç kaçtır?

A) 12 B) 15 C) 16 D) 17 E) 18



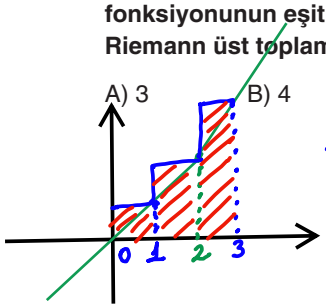
$1.f(1)+1.f(2)+1.f(3)$
$2+5+10=17$

2. $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

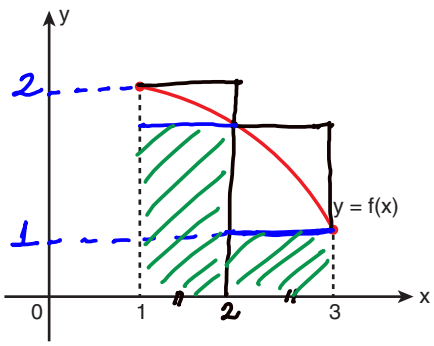
fonksiyonunun eşit uzunluktaki üç aralığa göre, Riemann üst toplamının sonucu kaçtır?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7



$1.f(1)+1.f(2)+1.f(3)$
$1+2+4=7$

3. $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ olmak üzere, f fonksiyonunun grafiği aşağıda gösterilmiştir.



$f(1) = 2$ ve $f(3) = 1$ dir.

[1, 3] aralığı 2 eşit alt aralığa bölünerek hesaplanan Riemann üst toplamının sonucu 3,8 dir.

Buna göre, aynı koşullarda Riemann alt toplamının sonucu kaçtır?

A) 3,4 B) 3,2 C) 3 D) 2,8 E) 2,4

Ü.T $= 1.f(1)+1.f(2)=3,8 \Rightarrow f(2)=1,8$

A.T $= 1.f(2)+1.f(3)=1,8+1=2,8$

4. f, [0, a] aralığı üzerinde sürekli, artan, pozitif değerli bir fonksiyondur ve $\int_0^a f(x)dx = 10$ dur.

Buna göre,

$$A = a\cdot\left[f\left(\frac{a}{10}\right)+f\left(\frac{2a}{10}\right)+f\left(\frac{3a}{10}\right)+\ldots+f\left(\frac{10a}{10}\right)\right]$$

toplamının en küçük tam sayı değeri kaçtır?

A) 98 B) 99 C) 100 D) 101 E) 102

$$\frac{A}{10} = \frac{a}{10}\left[f\left(\frac{a}{10}\right)+f\left(\frac{2a}{10}\right)+\ldots f\left(\frac{10a}{10}\right)\right]$$

$$\frac{A}{10} > \int_0^a f(x)dx \Rightarrow \frac{A}{10} > 10 \Rightarrow A > 100$$

5. Doğrusal bir yolda 2 m/sn hızla harekete başlayan bir cismin zaman bağlı ivmesi,

$\int a(t) = \int 3t^2 + 4$

fonksiyonuyla ifade edilmektedir.

Buna göre, bu hareketlinin 2. saniyedeki hızı kaç m/sn'dir?

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

$V(t) = \frac{3t^3}{3} + 4t + c$

$V(0) = 2 \Rightarrow c = 2$

$V(2) = 2^3 + 4.2 + 2 = 18$

6. Doğrusal bir yol boyunca hareket eden bir hareketlinin t anındaki hızı,

$V(t) = 3t^2 + 2$ dir.

Buna göre, hareketlinin ilk 2 saniyede aldığı yol kaç birimdir?

A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

$$\int_0^2 (3t^2+2)dt = (t^3+2t)\Big|_0^2 = 2^3+4 = 12$$

1. D	2. E	3. D	4. D	5. E	6. C

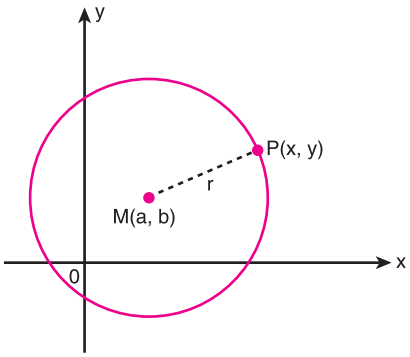
ACİL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

ÇEMBERİN STANDART DENKLEMİ

Düzlemde sabit bir noktaya eşit uzaklıktaki noktaların geometrik yerine **"Çember"** denir. Sabit nokta çemberin merkezini, eşit uzaklıklar ise çemberin yarıçapını oluşturur.

M(a, b) çemberin merkezi ve P(x, y) çember üzerinde bir noktayı temsil etmek üzere,



$|MP|$ = r yarıçap olduğundan,

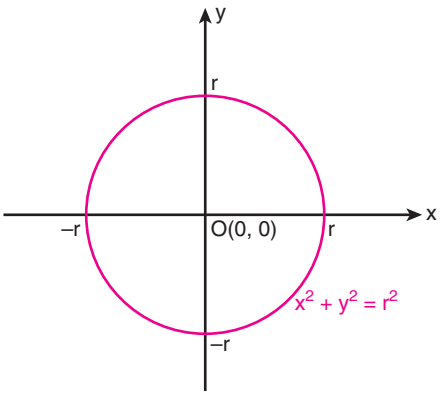
$$|MP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \text{ ise } \boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

elde edilir.

Bu denkleme **"Çemberin Standart Denklemi"** denir.

NOT

Merkezi orijinde olan çembere **"Merkezil Çember"** denir ve denklemi $x^2 + y^2 = r^2$ olur.



ÖRNEK 1.

Merkezi, M(–2, 3) ve yarıçapı 1 birim olan çemberin standart denklemini yazınız.

ÇÖZÜM

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1^2$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

ÖRNEK 2.

Merkezi M(4, 5) olan ve P(4, 7) noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = r^2$$

$P(4,7)$ $\quad 0^2 + 2^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 4$

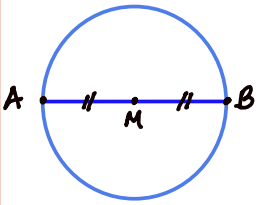
$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$$

ÖRNEK 3.

Dik koordinat düzleminde A(7, –2) ve B(5, 4) noktaları veriliyor.

Buna göre, [AB] çaplı çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM



$M\left(\frac{7+5}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = M(6, 1)$

$2r = |AB| = \sqrt{2^2 + 6^2}$

$2r = 2\sqrt{10} \Rightarrow r = \sqrt{10}$

$$(x-6)^2 + (y-1)^2 = 10$$

1. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$	2. $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 4$
3. $(x-6)^2 + (y-1)^2 = 10$	

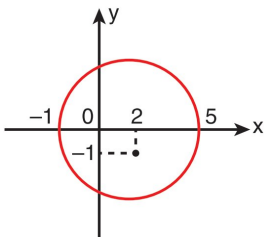
ÖRNEK 4.

Standart denklemi,

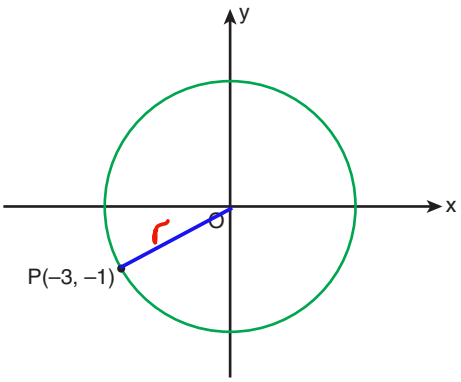
$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

olan çemberi dik koordinat düzleminde gösteriniz.

ÇÖZÜM



ÖRNEK 5.



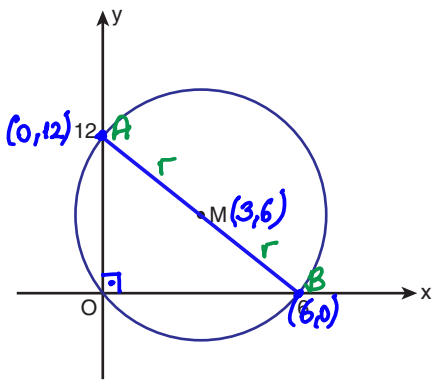
O merkezli ve P(–3, –1) noktasından geçen çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$r = |OP| \Rightarrow r = \sqrt{3^2+1^2} \Rightarrow r^2 = 10$

$x^2+y^2=10$

ÖRNEK 6.



Dik koordinat sisteminde çizilmiş olan çemberin standart denklemini bulunuz.

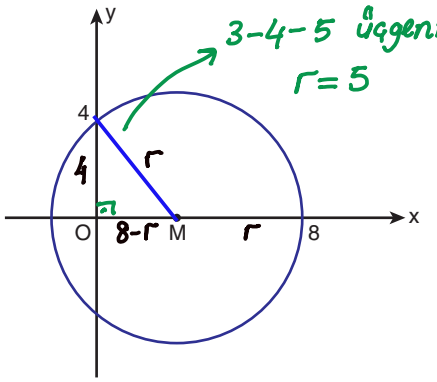
ÇÖZÜM

$2r = |AB| = \sqrt{12^2+6^2}$

$2r = 6\sqrt{5} \Rightarrow r^2 = 45$

$(x-3)^2+(y-6)^2=45$

ÖRNEK 7.

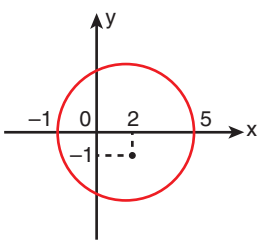


Dik koordinat sisteminde çizilmiş olan M merkezli çemberin standart denklemini bulunuz.

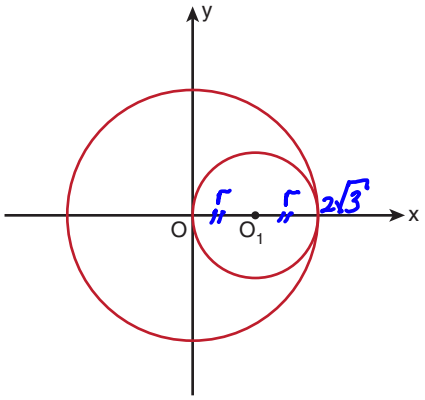
ÇÖZÜM

$M(3,0)$, $r^2 = 25$

$(x-3)^2 + y^2 = 25$

4. 	5. $x^2 + y^2 = 10$
	6. $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 45$
	7. $(x - 3)^2 + y^2 = 25$

ÖRNEK 8.



Yukarıdaki dik koordinat düzleminde denklemi $x^2 + y^2 = 12$ olan çember ile merkezi O_1 olan çember verilmiştir.

Buna göre, O_1 merkezli çemberin standart denklemini bulunuz.

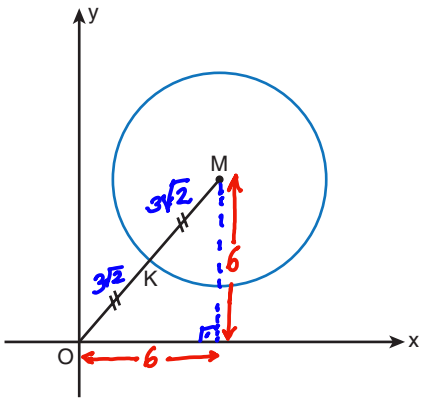
ÇÖZÜM

$2r = 2\sqrt{3} \Rightarrow r = \sqrt{3}$

$O_1(\sqrt{3}, 0)$ $\quad r^2 = 3$

$(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 3$

ÖRNEK 9.



Şekildeki dik koordinat sisteminde M merkezli çember çizilmiştir.

$|OK| = |KM| = 3\sqrt{2}$ ve [OM] nin eğimi 1'dir.

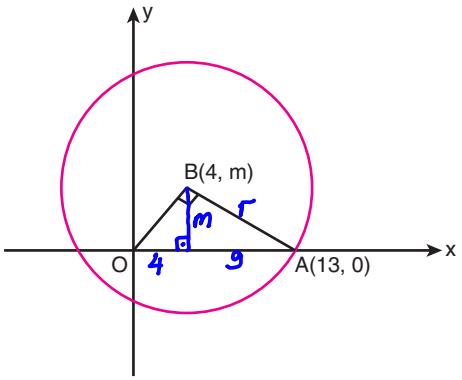
Buna göre, çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x-6)^2 + (y-6)^2 = (3\sqrt{2})^2$

$(x-6)^2 + (y-6)^2 = 18$

ÖRNEK 10.



Dik koordinat düzleminde B(4, m) merkezli çember çizilmiştir.

[OB] ⊥ [BA] ve A(13, 0) olduğuna göre, çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

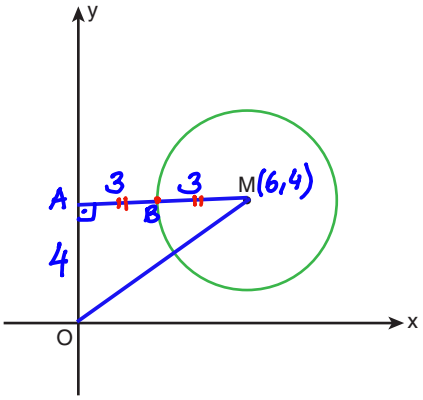
$m^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow m = 6$

$r^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow r^2 = 117$

$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 117$

8. $(x - \sqrt{3})^2 + y^2 = 3$	9. $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 18$
10. $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 117$	

ÖRNEK 11.



Dik koordinat düzleminde,

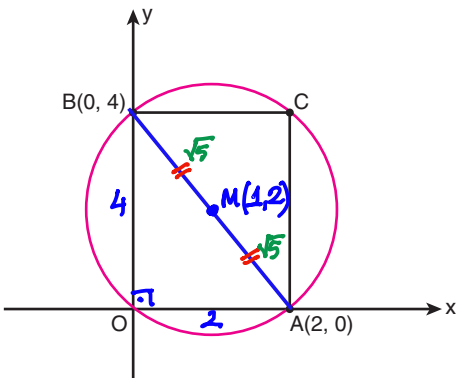
$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 9$

denklemi ile verilen çemberin Oy eksenine en kısa uzaklığı kaç birimdir?

ÇÖZÜM

$|AB| = 3$ br

ÖRNEK 12.



OACB bir dikdörtgendir.

B(0, 4) ve A(2, 0) dır.

Buna göre, çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{5})^2$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

ÖRNEK 13.

Standart denklemi,

$(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 20$

olan çember dik koordinat sisteminde Ox eksenini K ve L noktalarında kesmektedir.

Buna göre, |KL| kaç birimdir?

ÇÖZÜM

$y = 0$ için $(x-6)^2 + 2^2 = 20$

$(x-6)^2 = 16$

$x - 6 = 4 \Rightarrow x = 10$

$x - 6 = -4 \Rightarrow x = 2$

$K(10,0)$ $L(2,0)$ $\Rightarrow |KL| = 8$

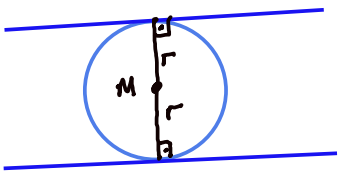
ÖRNEK 14.

$x - 2y + 6 = 0$ ve

$x - 2y - 4 = 0$

doğrularına teğet olan çemberin yarıçapı kaç birimdir?

ÇÖZÜM



$2r = \dfrac{|6-(-4)|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$2r = \dfrac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = \sqrt{5}$

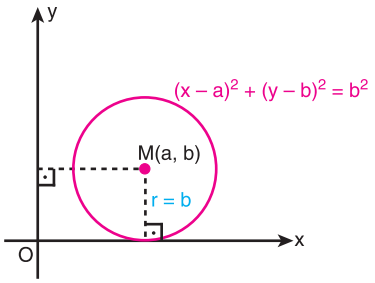
11. 3	12. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$	13. 8	14. $\sqrt{5}$

ACİL MATEMATİK

YANINDA BULUNSUN

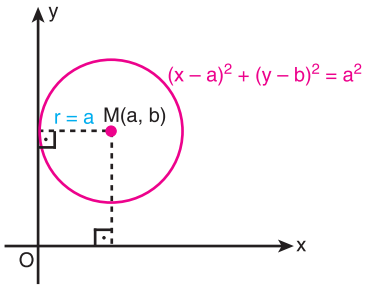
EKSENLERE TEĞET OLAN ÇEMBERLER

1) x eksenine teğet olan çember:



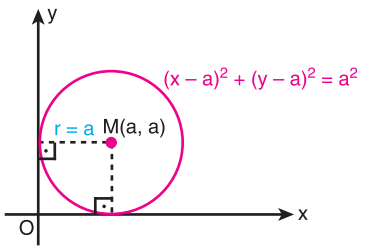
Çember x eksenine teğet iken b < 0 olduğunda r = |b| alınmalıdır.

2) y eksenine teğet olan çember:



Çember y eksenine teğet iken a < 0 olduğunda r = |a| alınmalıdır.

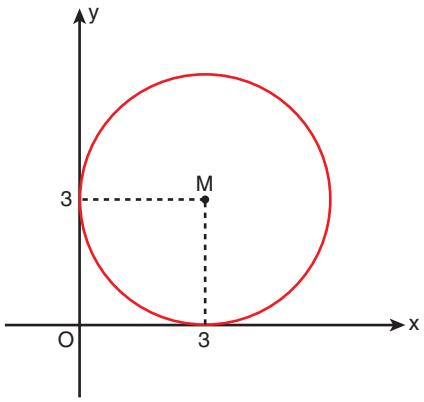
3) x ve y eksenine teğet olan çember:



Çember x ve y eksenine teğet iken a < 0 olduğunda r = |a| alınmalıdır.

NOT: Koordinat sisteminin birinci ve üçüncü bölgesinde eksenlere teğet çemberlerin merkezi y = x doğrusu üzerinde, ikinci ve dördüncü bölgesinde eksenlere teğet çemberlerin merkezi y = –x doğrusu üzerindedir.

ÖRNEK 15.



Yukarıda analitik düzlemde çizilen M merkezli çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x-3)^2+(y-3)^2=3^2$

$(x-3)^2+(y-3)^2=9$

ÖRNEK 16.

Merkezinin koordinatları M(2, –5) ve Ox eksenine teğet olan çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x-2)^2+(y+5)^2=(-5)^2$

$(x-2)^2+(y+5)^2=25$

ÖRNEK 17.

Eksenlere teğet ve merkezinin koordinatları toplamı –8 olan çemberin standart denklemini yazınız.

ÇÖZÜM

$M(r,r)$ $\quad 2r=-8$

$r=-4$

$(x+4)^2+(y+4)^2=16$

15. $(x-3)^2+(y-3)^2=9$	16. $(x-2)^2+(y+5)^2=25$
17. $(x+4)^2+(y+4)^2=16$	

ÖRNEK 18.

M merkezli ve yarıçapı 5 birim olan çember analitik düzlemin 4. bölgesinde eksenlere teğettir.

Buna göre, çemberin standart denklemini yazınız.

ÇÖZÜM

$M(r, -r)$ $r = 5$

$M(5, -5)$ $r^2 = 25$

$(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

ÖRNEK 19.

Merkezi 3x + 2y – 6 = 0 doğrusu üzerinde ve eksenlere 4. bölgede teğet olan çemberin standart denklemini yazınız.

ÇÖZÜM

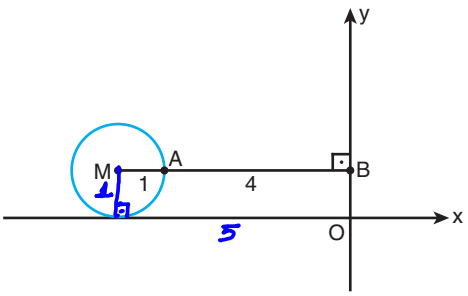
$M(r, -r)$ $3r - 2r - 6 = 0$

$r = 6$

$M(6, -6)$ $r^2 = 36$

$(x-6)^2 + (y+6)^2 = 36$

ÖRNEK 20.



[MB] ⊥ Oy

|MA| = 1 birim

|AB| = 4 birim

Şekilde M merkezli çember Ox eksenine teğettir.

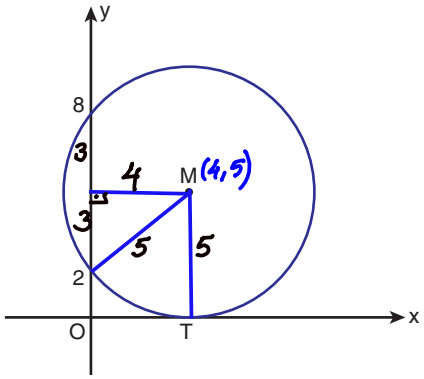
Buna göre, çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$M(-5, 1)$ $r = 1$

$(x+5)^2 + (y-1)^2 = 1$

ÖRNEK 21.



Dik koordinat düzleminde M merkezli çember Ox eksenine T noktasında teğettir.

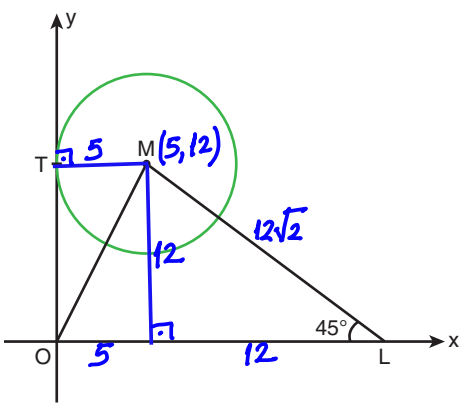
Buna göre, çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$

ÖRNEK 22.



$m(\widehat{OLM}) = 45°$

$|ML| = 12\sqrt{2}$ birim

|OL| = 17 birim

Dik koordinat düzleminde M merkezli çember Oy eksenine T noktasında teğettir.

Buna göre, çemberin standart denklemini bulunuz.

18. $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$	19. $(x-6)^2 + (y+6)^2 = 36$
20. $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 1$	21. $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25$
22. $(x-5)^2 + (y-12)^2 = 25$	

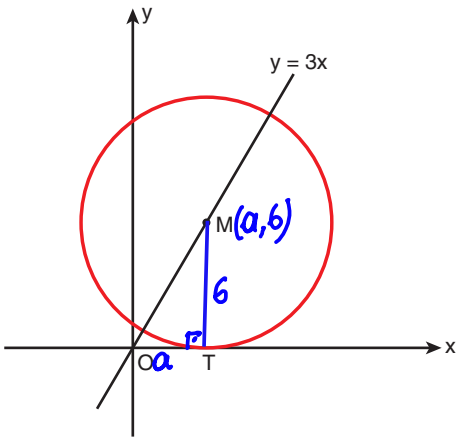
AÇIL MATEMATİK

ÇÖZÜM

$(x-5)^2+(y-12)^2=5^2$

$(x-5)^2+(y-12)^2=25$

ÖRNEK 23.



Analitik düzlemde çizilen M merkezli çember Ox eksenine T noktasında teğettir. Çemberin merkezi y = 3x doğrusu üzerinde olup M noktasının ordinatı 6'dır.

Buna göre, çemberin standart denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$3.a=6 \Rightarrow a=2$

$M(2,6) \quad r=6$

$(x-2)^2+(y-6)^2=6^2$

$(x-2)^2+(y-6)^2=36$

YANINDA BULUNSUN

ÇEMBERİN GENEL DENKLEMİ

M(a, b) merkezli r yarıçaplı çemberin standart denkleminin,

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ olduğunu biliyoruz.

Bu denklem açılarak düzenlenirse,

$$x^2+y^2\underbrace{-2ax}_{D}\underbrace{-2by}_{E}+\underbrace{a^2+b^2-r^2}_{F}=0$$

$-2a = D$, $-2b = E$ ve $a^2 + b^2 - r^2 = F$ eşitlikleri yazılarak elde edilen,

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

denklemine **"Çemberin Genel Denklemi"** denir.

O hâlde, genel denklemi verilen bir çemberde,

$-2a = D$ ve $-2b = E$

olduğundan, çemberin merkezi,

$M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ olur.

Ayrıca çemberin yarıçapı, $a^2 + b^2 - r^2 = F$ eşitliğinde a ve b yerine D ve E'li eşitleri yazıldıktan sonra r yalnız bırakılırsa,

$r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{D^2+E^2-4F}$ bulunur.

NOT

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

denkleminin çember belirtmesi için

1. A ve C sıfırdan farklı aynı reel sayıya eşit olmalıdır. Merkez ve yarıçap bulunurken A = C = 1 olmalıdır.
2. B = 0 olmalıdır. (xy'li terim olmamalıdır.)
3. $D^2 + E^2 - 4F = \Delta$ dersek,

   $\Delta > 0$ ise verilen denklem çember belirtir.

   $\Delta = 0$ ise verilen denklem nokta belirtir. (Çember belirtmez.)

   $\Delta < 0$ ise verilen denklem çember belirtmez.

23. $(x-2)^2+(y-6)^2=36$

ÖRNEK 24.

Genel denklemi,

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$

olan çemberin merkezini bulunuz.

ÇÖZÜM

$M\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{6}{2}\right)$

$M(2, -3)$

ÖRNEK 25.

Genel denklemi,

$x^2 + y^2 - 4x + 12y - 20 = 0$

olan çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

ÇÖZÜM

$M\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{12}{2}\right) = M(2, -6)$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 12^2 - 4.(-20)} = \frac{1}{2}\sqrt{240} = \frac{1}{2}.4\sqrt{15}$

$r = 2\sqrt{15}$

ÖRNEK 26.

Genel denklemi,

$x^2 + y^2 + 2x - 10y + m = 0$

olan çemberin yarıçapı 4 birimdir.

Buna göre, m kaçtır?

ÇÖZÜM

$r = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 10^2 - 4.m} = 4$

$104 - 4m = 64$

$4m = 40 \Rightarrow m = 10$

ÖRNEK 27.

k bir gerçek sayıdır.

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$

denklemi bir çember belirtmektedir.

Buna göre, k'nın en geniş aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

$\Delta = 4^2 + 6^2 - 4.k > 0$

$4k < 16 + 36$

$k < 13$

ÖRNEK 28.

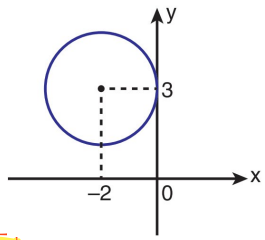
Genel denklemi,

$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

olan çemberi analitik düzlemde gösteriniz.

ÇÖZÜM

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$



ÖRNEK 29.

$ax^2 + ay^2 + (a + 2) \cdot xy + 4 = 0$

denklemi bir çember denklemi belirttiğine göre, çemberin yarıçapı kaç birimdir?

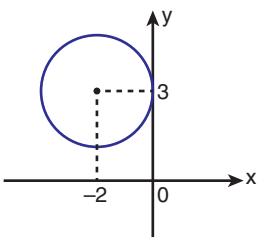
ÇÖZÜM

$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$

$-2x^2 - 2y^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2 = 0$

$x^2 + y^2 = 2$

$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

24. m(2, –3)	25. M(2, –6) r = $2\sqrt{15}$	26. 10
27. k < 13	28. 	28. $\sqrt{2}$

ÖRNEK 30.

Dik koordinat sisteminde,

$x^2 + y^2 + mx + 4y + 5 = 0$

denklemi bir nokta belirttiğine göre, m'nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

$\Delta = m^2 + 4^2 - 4 \cdot 5 = 0$

$m^2 = 4 \Rightarrow m = 2 \;,\; m = -2$

$\{-2, 2\}$

ÖRNEK 31.

$(m - 1)x^2 + 2y^2 + (m + 3) \cdot x + 2ny + n - 2 = 0$

denklemi orijinden geçen bir çember denklemidir.

Buna göre, bu çemberin yarıçapı kaç birimdir?

ÇÖZÜM

$m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3 \qquad n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$

$2x^2 + 2y^2 + 6x + 4y = 0$

$x^2 + y^2 + 3x + 2y = 0$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{3^2 + 2^2 - 4 \cdot 0} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13}$

$r = \frac{\sqrt{13}}{2}$

ÖRNEK 32.

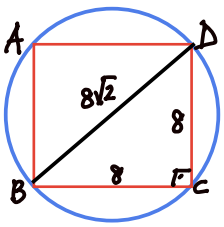
$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 7 = 0$

denklemi ile verilen çemberin içine çizilebilecek en büyük karenin alanı kaç birimkaredir?

ÇÖZÜM

$r = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2 - 4 \cdot (-7)}$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{128} = 4\sqrt{2}$



$A(ABCD) = 8^2 = 64$

ÖRNEK 33.

Genel denklemi,

$x^2 + y^2 + 8x - 2y = k$

olan çemberin merkezinden geçen ve eğimi –2 olan doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$M(-4, 1) \qquad m = -2$

$y - 1 = -2 \cdot (x + 4)$

$y = -2x - 7 \Rightarrow y + 2x + 7 = 0$

ÖRNEK 34.

$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 1 = 0$

çemberi ile aynı merkezli ve yarıçapı $2\sqrt{2}$ birim olan çemberin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$M(3, -5) \qquad r = 2\sqrt{2}$

$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 8$

ÖRNEK 35.

Analitik düzlemde,

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + p = 0$

çemberinin çapının uç noktalarından birisi A(–2, 3) olduğuna göre, çapının diğer uç noktasının koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

$M(1, -2) \qquad B(x, y)$ olsun.

$\frac{x - 2}{2} = 1 \qquad \frac{y + 3}{2} = -2$

$x = 4 \qquad y = -7$

$B(4, -7)$

30. {–2, 2}	31. $\frac{\sqrt{13}}{2}$	32. 64
33. $y + 2x + 7 = 0$	34. $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 8$	35. (4, –7)

ÖRNEK 36.

$x^2 + y^2 + 6x - 2y + p = 0$

denklemi bir çember belirtmediğine göre, p'nin bulunduğu en geniş aralığı bulunuz.

ÇÖZÜM

$\Delta = 6^2 + 2^2 - 4 \cdot p \leq 0$

$40 \leq 4p$

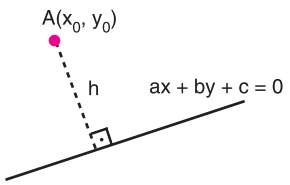
$10 \leq p$

YANINDA BULUNSUN

BİR DOĞRU İLE BİR ÇEMBERİN BİRBİRİNE GÖRE DURUMU

Hatırlatma:

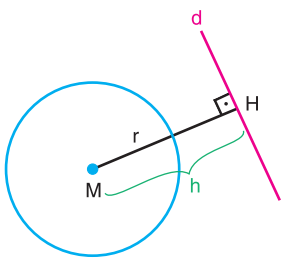
Analitik düzlemde, $A(x_0, y_0)$ noktasının $ax + by + c = 0$ doğrusuna uzaklığı,



$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1) Doğru, çemberi kesmez:

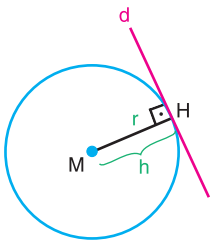
Çemberin merkezinin doğruya uzaklığı yarıçaptan büyükse doğru ve çember kesişmez.



h > r

2) Doğru, çembere teğet olabilir:

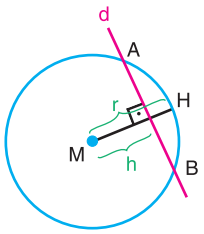
Çemberin merkezinin doğruya uzaklığı yarıçapa eşitse doğru çembere teğet olur.



h = r

3) Doğru, çemberi iki farklı noktada kesebilir:

Çemberin merkezinin doğruya uzaklığı yarıçaptan küçükse doğru çemberi iki farklı noktada keser. Doğru ve çemberin kesim noktaları, denklemlerin oluşturduğu denklem sistemi çözülerek bulunur.



h < r

ÖRNEK 37.

Analitik düzlemde, $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 100$ çemberi ile $4x - 3y = 8$ doğrusunun birbirine göre durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM

$M(-4, 2) \quad r = 10 \quad 4x - 3y - 8 = 0$

$h = \frac{|-16 - 6 - 8|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{30}{5} = 6$

$h < r$ doğru çemberi iki farklı noktada keser.

ÖRNEK 38.

$3x + 4y + m = 0$ doğrusu $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ çemberine teğettir.

Buna göre, m kaç olabilir?

36. $p \geq 10$	**37.** Doğru çemberi iki farklı noktada keser.	**38.** –17 veya 13

ÇÖZÜM

$M(2,-1)\quad r=3\quad 3x+4y+m=0$

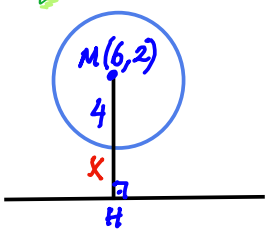
$$h=\frac{|6-4+m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r=3$$

$$|m+2|=15 \Rightarrow m+2=15 \vee m+2=-15$$
$$m=13 \qquad m=-17$$

ÖRNEK 39.

$(x-6)^2+(y-2)^2=16$ çemberi ile $3x-4y+24=0$ doğrusu arasındaki en kısa uzaklık kaç birimdir?

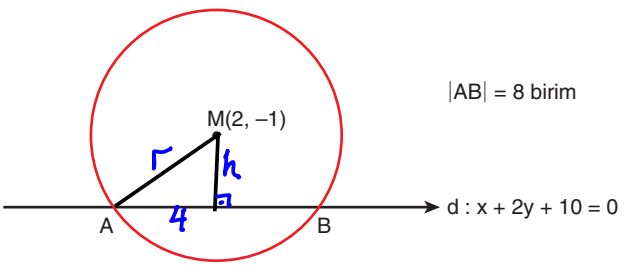
ÇÖZÜM



$$|MH|=\frac{|18-8+24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{34}{5}$$

$$x+4=\frac{34}{5} \Rightarrow x=\frac{14}{5}$$

ÖRNEK 40.



Yukarıda verilen M(2, –1) merkezli çemberin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$h=\frac{|2-2+10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$$

$$r^2=4^2+(2\sqrt{5})^2 \Rightarrow r^2=36$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=36$$

ÖRNEK 41.

Merkezi M(5, –2) olan ve $x+y+7=0$ doğrusuna teğet olan çemberin denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

$$r=\frac{|5-2+7|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$$

$$(x-5)^2+(y+2)^2=(5\sqrt{2})^2$$

$$(x-5)^2+(y+2)^2=50$$

ÖRNEK 42.

Analitik düzlemde $y=x-1$ doğrusu ile $x^2+y^2=3$ çemberinin kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

$$x^2+(x-1)^2=3$$
$$x^2+x^2-2x+1=3$$
$$2x^2-2x-2=0$$
$$x^2-x-1=0$$
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$
$$x_1+x_2=1$$

39. $\frac{14}{5}$	40. $(x-2)^2+(y+1)^2=36$	41. $(x-5)^2+(y+2)^2=50$	42. 1

1. Standart denklemi,

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

olan çemberin merkezi M(a, b) ve yarıçapı r'dir.

Buna göre, a + b + r toplamı kaçtır?

A) 27 B) 21 C) 9 D) 7 E) 6

M(-1, 3) r = 5

-1+3+5=7

2. **Analitik düzlemde P(–2, 3) noktasının, denklemi $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ ile verilen çemberin merkezine olan uzaklığı kaç birimdir?**

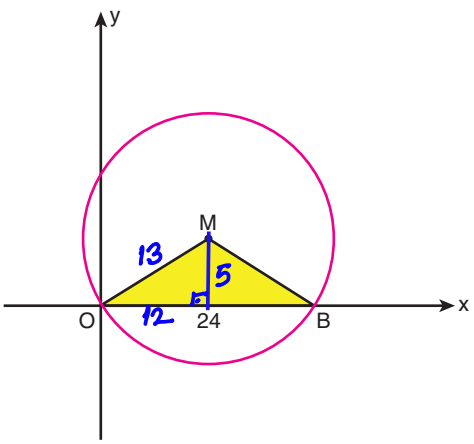
A) 5 B) 7 C) 10 D) 13 E) 15

M(5, 3)

$|MP| = \sqrt{(5+2)^2 + (3-3)^2} = 7$

3. Aşağıda M merkezli bir çember çizilmiştir.

|OB| = 24 birimdir.



Boyalı OMB üçgeninin alanı 60 birimkare olduğuna göre, çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x - 12)^2 + (y - 10)^2 = 144$

B) $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 169$

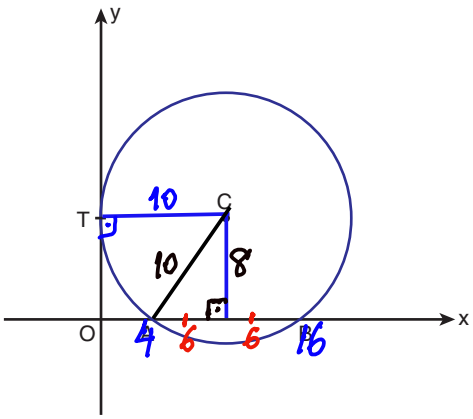
C) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 144$

D) $(x - 5)^2 + (y - 13)^2 = 144$

E) $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 169$

$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 13^2 = 169$

4. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde çizilmiş olan C merkezli çember T noktasında y eksenine teğettir.



A(4, 0) ve B(16, 0) olduğuna göre, C noktasının x eksenine olan uzaklığı kaç birimdir?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 10 E) 12

5. Denklemi,

$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

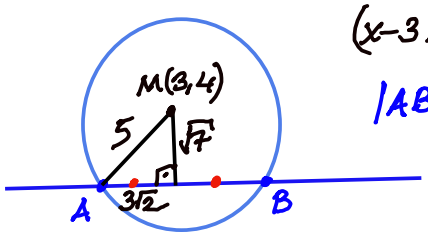
olan çembere, çemberi A ve B noktalarında kesen bir AB doğrusu çiziliyor. Çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı $\sqrt{7}$ birimdir.

Buna göre, |AB| kaç birimdir?

A) $6\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 6 D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

$|AB| = 6\sqrt{2}$



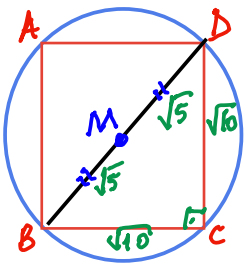
ACİL MATEMATİK

6. **Dik koordinat düzleminde,**

$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 20 = 0$

denklemli çember içerisine çizilebilecek en büyük karenin alanı kaç birimkaredir?

A) 10 B) 12,5 C) 15 D) 17,5 E) 20



$r = \frac{1}{2}\sqrt{36+64-80}$

$r = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$

$A(ABCD) = (\sqrt{10})^2 = 10$

7. $a \neq b$ olmak üzere, a ve b birer gerçek sayıdır.

Dik koordinat sisteminde denklemi,

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

olan çember $x = a$ ve $x = b$ doğrularına teğettir.

Buna göre, a + b toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

$M(4, 3)$

$\frac{a+b}{2} = 4 \Rightarrow a+b = 8$

8. Analitik düzlemde merkezi $y = 2x$ doğrusu üzerinde bulunan M merkezli çember ile çember üzerinde verilen K(0, –1) ve L(2, 5) noktaları veriliyor.

Buna göre, çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + (y-1)^2 = 7$ B) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 1$

C) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$ D) $x^2 + (y+1)^2 = 7$

E) $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 1$

$M(a, 2a)$

$|ML| = |MK| \Rightarrow \sqrt{(a-2)^2+(2a-5)^2} = \sqrt{a^2+(2a+1)^2}$

$a = 1$

$|ML| = |MK| = r = \sqrt{1^2+3^2} \Rightarrow r^2 = 10$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$

9. $y = ax + 3$ doğrusu $x^2 + y^2 - 8x = 9$ çemberine teğettir.

Buna göre, a kaçtır?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{4}{3}$ C) $\frac{8}{5}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{9}{4}$

$x^2 + (ax+3)^2 - 8x = 9$

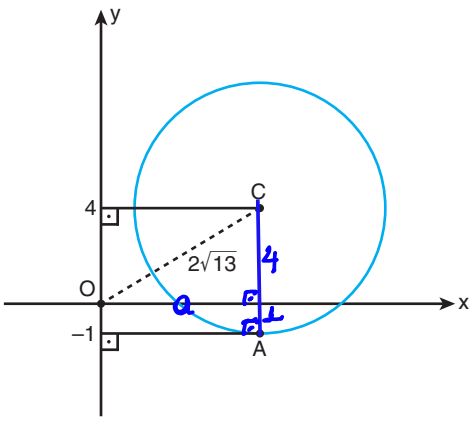
$x^2 + a^2x^2 + 6ax + 9 - 8x = 9$

$(a^2+1)\cdot x^2 + (6a-8)x = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow (6a-8)^2 - 4\cdot(a^2+1)\cdot 0 = 0$

$6a = 8 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$

10. Aşağıda dik koordinat sisteminde C merkezli bir çember çizilmiştir.



C noktasının ordinatı 4 ve A noktasının ordinatı –1'dir.

$|OC| = 2\sqrt{13}$ birim olduğuna göre, çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$

B) $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$

C) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$

D) $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 16$

E) $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 16$

$a^2 + 4^2 = (2\sqrt{13})^2$

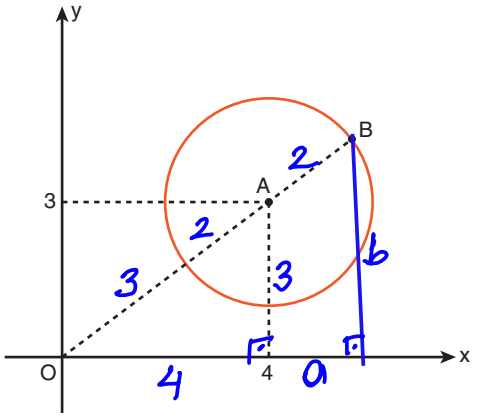
$a = 6$

$M(6, 4) \quad r = 5$

$(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$

ACİL MATEMATİK

11. Aşağıda yarıçapı 2 birim olan A merkezli çember çizilmiştir.



Buna göre, çemberin üzerindeki B noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\left(\frac{28}{5}, \frac{21}{5}\right)$ B) $\left(\frac{27}{5}, \frac{19}{5}\right)$ C) $\left(\frac{28}{5}, \frac{23}{5}\right)$

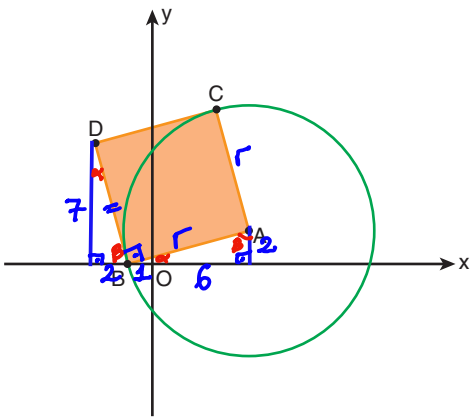
D) $\left(\frac{29}{5}, \frac{21}{5}\right)$ E) $\left(\frac{29}{5}, \frac{23}{5}\right)$

$\frac{5}{7} = \frac{4}{4+a} = \frac{3}{b}$

$b = \frac{21}{5}$ $\quad a+4 = \frac{28}{5}$

$B(a+4, b) = B\left(\frac{28}{5}, \frac{21}{5}\right)$

12. Dik koordinat sisteminde ACDB karesi ile A merkezli çember çizilmiştir.



B(–1, 0)

D(–3, 7) dir.

Buna göre, çemberin standart denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 53$

B) $(x-5)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{53}$

C) $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 53$

D) $(x-6)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{53}$

E) $(x-7)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{53}$

$r^2 = 7^2 + 2^2 \Rightarrow r^2 = 53$

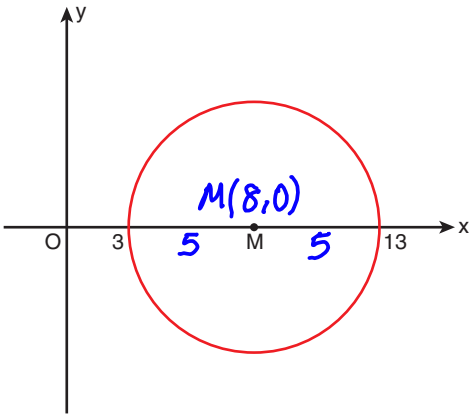
$M(6, 2)$

$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 53$

ACİL MATEMATİK

1. D	2. B	3. E	4. B	5. B	6. A
7. E	8. C	9. B	10. B	11. A	12. A

1.



Yukarıdaki dik koordinat sisteminde merkezi x ekseni üzerinde olan çember x eksenini (3, 0) ve (13, 0) noktalarında kesmektedir.

Buna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x-3)^2+y^2=16$ B) $(x-3)^2+y^2=25$

C) $(x-8)^2+y^2=16$ D) $(x-8)^2+y^2=25$

E) $x^2+(y-8)^2=16$

$(x-8)^2+y^2=5^2$

$(x-8)^2+y^2=25$

2. **Denklemi,**

$x^2+y^2-14x-2y+41=0$

olan çemberin merkezi M ve yarıçapı r aşağıdaki seçeneklerin hangisinde doğru olarak verilmiştir?

A) M(1, 7), r = 3 B) M(7, 1), $r=\sqrt{41}$

C) M(7, 1), r = 3 D) M(1, 7), $r=\sqrt{41}$

E) M(7, 1), $r=5\sqrt{2}$

$M(7,1)$ $r=\frac{1}{2}\sqrt{14^2+2^2-4\cdot 41}$

$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{36}=3$

3. **Dik koordinat sisteminde denklemi,**

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$

olan çember ile y = x + 2 doğrusunun kesim noktalarının ordinatları toplamı kaçtır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

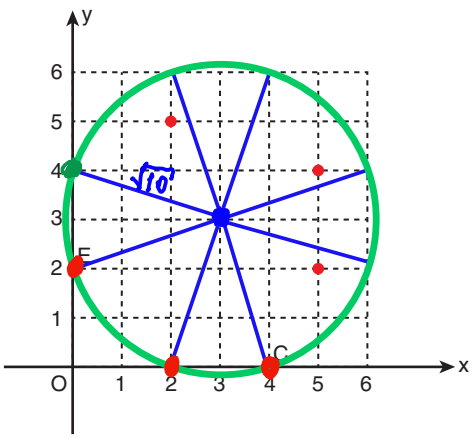
$(x-2)^2+(x)^2=4$

$2x^2-4x+4=4 \Rightarrow x=0,\ x=2$

$A(0,2)$ $B(2,4)$

$2+4=6$

4.



Yukarıdaki birim karelere ayrılmış dik koordinat sisteminde merkezi M(3, 3) olan bir çember çizilecektir.

Çember yeşile boyalı noktadan geçtiğine göre, kırmızıya boyalı kaç tane noktadan geçer?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

ACİL MATEMATİK

5. **Standart denklemi,**

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

olan çember aşağıdaki doğrulardan hangisine teğettir?

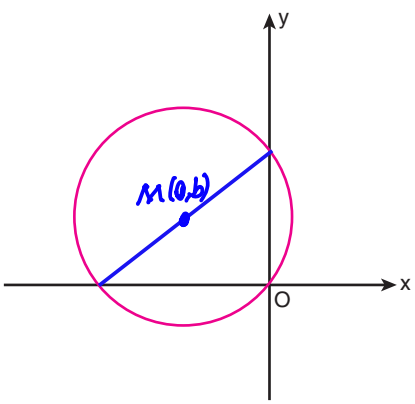
A) $x = 0$ B) $y = 0$ C) $x = 3$

D) $x = -3$ E) $y = 3$

$M(-1, 3)$ $r = 3$

x eksenine teğet bir çember

6.



Yukarıdaki analitik düzlemde çizilmiş ve orijinden geçen çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $x^2 + (y + 2)^2 = 10$

B) $(x + 3)^2 + y^2 = 10$

C) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

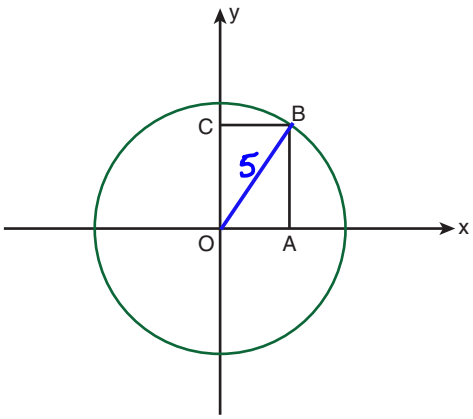
D) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$

E) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$

$M(a, b)$
$a < 0$, $b > 0$
olmalıdır.

c) $M(-3, 2) \rightarrow$ şart sağlanır.

7.



Yukarıdaki dik koordinat sisteminde merkezi orijin olan bir çember çizilmiştir.

OABC dikdörtgeninde $|AC| = 5$ birim olduğuna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + y^2 = \sqrt{5}$ B) $x^2 + y^2 = 5$ C) $x^2 + y^2 = 25$

D) $x^2 + y^2 = 5\sqrt{5}$ E) $x^2 + y^2 = 10$

$|AC| = |OB| = r = 5$

$x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

8. m bir gerçek sayıdır.

$x^2 + y^2 - 2x + 10y + m = 0$

denklemi bir çember belirtmektedir.

Buna göre, m'nin bulunduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

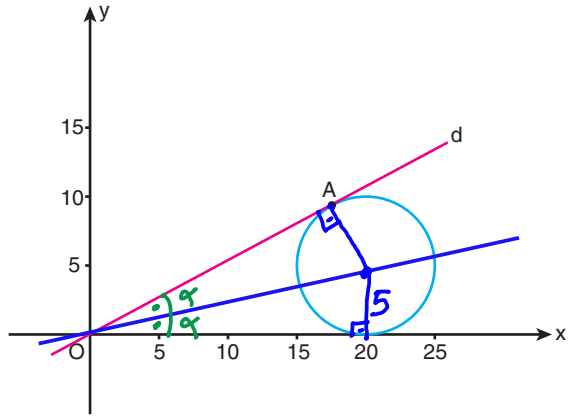
A) $m < 29$ B) $m > 29$ C) $m < 27$

D) $m < 26$ E) $m > 26$

$\Delta = 2^2 + 10^2 - 4m > 0$

$104 > 4m \Rightarrow m < 26$

9. Aşağıda denklemi $(x-20)^2+(y-5)^2=25$ olan çember x eksenine ve d doğrusuna A noktasında teğettir.



Buna göre, d doğrusunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=\frac{1}{2}x$ B) $y=\frac{8}{15}x$ C) $y=\frac{9}{17}x$

D) $y=2x$ E) $y=\frac{1}{2}x+1$

$\tan\alpha=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$ $m_d=\tan 2\alpha$

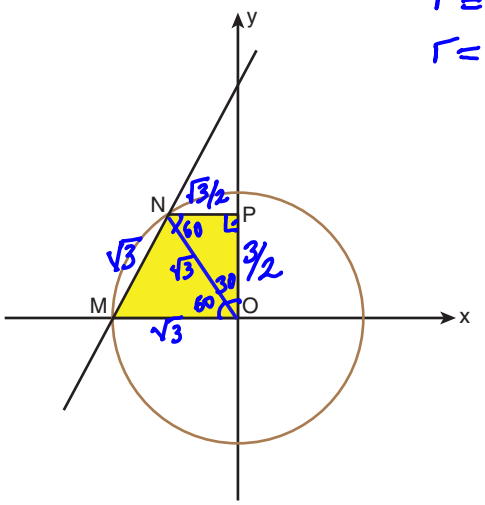
$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{1/2}{1-1/16}=\frac{8}{15}$

$y=\frac{8}{15}x$

10. Dik koordinat düzleminde denklemi $x^2+y^2=3$ olan çemberin içerisine MOPN dik yamuğu çizilmiştir.

$r^2=3$

$r=\sqrt{3}$



$|MN|=\sqrt{3}$ birim olduğuna göre, A(MOPN) kaç birimkaredir?

A) $\frac{3}{8}$ B) $\frac{21}{8}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ E) $\frac{63\sqrt{3}}{8}$

$A(MOPN)=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}/2}{2}\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{9\sqrt{3}}{8}$

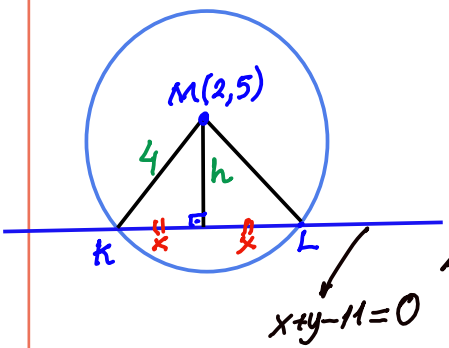
11. Analitik düzlemde denklemi,

$x^2+y^2-4x-10y+13=0 \Rightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=16$

olan çemberin merkezi M noktasıdır.

$x+y-11=0$ doğrusu çemberi K ve L noktalarında kestiğine göre, A($\widehat{KLM}$) kaç birimkaredir?

A) $4\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) 7 D) 8 E) $8\sqrt{2}$



$h=\frac{|2+5-11|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

$x^2+h^2=4^2$

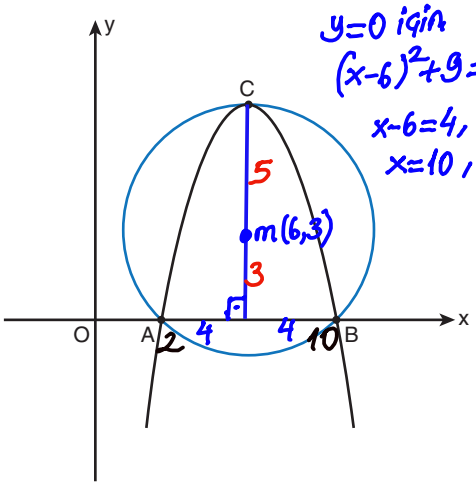
$x^2+8=16 \Rightarrow x=2\sqrt{2}$

$A(\widehat{KLM})=\frac{2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2}=8$

$x+y-11=0$

12. Dik koordinat sisteminde denklemi $(x-6)^2+(y-3)^2=25$ olan çember ile tepe noktası C olan bir parabol çizilmiştir.

Çember ile parabolün ortak noktaları A, B ve C'dir.



$y=0$ için

$(x-6)^2+9=25$

$x-6=4,\ x-6=-4$

$x=10,\ x=2$

Buna göre, parabolün denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=-0{,}5x^2+6x-10$ B) $y=-x^2+12x-20$

C) $y=x^2-12x-20$ D) $y=-0{,}5x^2+12x-10$

E) $y=-0{,}5x^2-8x-10$

$y=a\cdot(x-2)\cdot(x-10)$ $C(6,8)$

$a\cdot 4\cdot(-4)=8 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}=-0{,}5$

$y=-0{,}5x^2+6x-10$

1. D	2. C	3. E	4. C	5. B	6. C
7. C	8. D	9. B	10. D	11. D	12. A

AÇIL MATEMATİK

1. $2x^2 + 2y^2 + \log_{\frac{1}{9}} 81 = 0$

denklemi için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) Yarıçapı $\sqrt{2}$ olan bir çember belirtir.

B) Yarıçapı 2 olan bir çember belirtir.

C) Yarıçapı 1 olan bir çember belirtir.

D) Nokta belirtir.

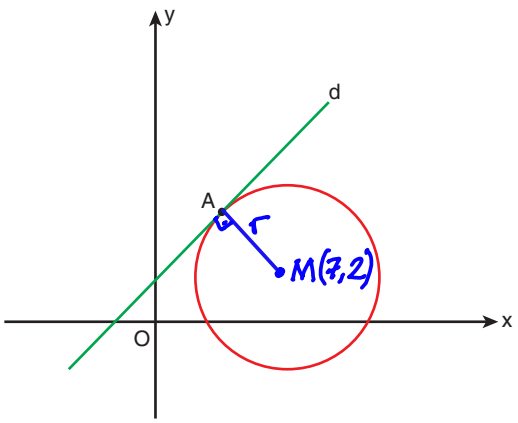
E) Çember belirtmez.

$2x^2+2y^2+\log_{9^{-1}} 9^2=0$

$2x^2+2y^2-2=0$

$x^2+y^2=1$

2.



Dik koordinat sisteminde çizilmiş olan M(7, 2) merkezli çember d: 3x – 4y + 12 = 0 doğrusuna A noktasında teğettir.

Buna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 25$

B) $(x+7)^2 + (y+2)^2 = 25$

C) $(x-7)^2 + (y+2)^2 = 36$

D) $(x-7)^2 + (y-2)^2 = 36$

E) $(x+7)^2 + (y-2)^2 = 36$

$r = \frac{|3\cdot7-4\cdot2+12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{25}{5} = 5$

$(x-7)^2+(y-2)^2=25$

3. a bir gerçek sayıdır.

$ax^2 + ay^2 + (a-3)xy - 12x + 6y - 3 = 0$

denklemi bir çember belirtmektedir.

Buna göre, bu çemberin yarıçapı kaç birimdir?

A) 3 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{5}$

$a-3=0 \Rightarrow a=3$

$3x^2+3y^2-12x+6y-3=0$

$x^2+y^2-4x+2y-1=0$

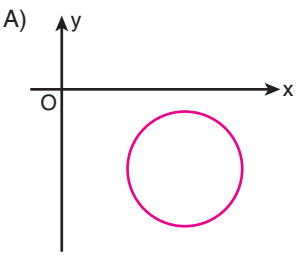
$(x-2)^2+(y+1)^2=6$ $\quad r^2=6$ $\quad r=\sqrt{6}$

4. **Denklemi,**

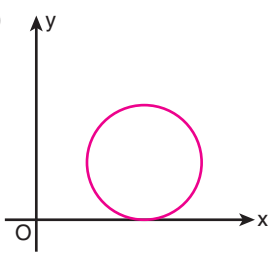
$4x^2 + 4y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$

olan çemberin analitik düzlemdeki görüntüsü aşağıdakilerden hangisi olabilir?

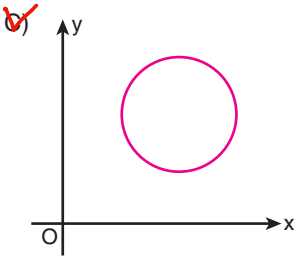
A)



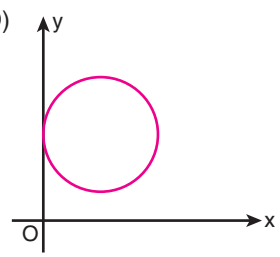
B)



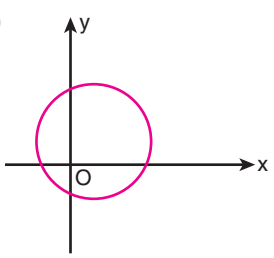
C)



D)



E)



$x^2+y^2-2x-2y+\frac{7}{4}=0$

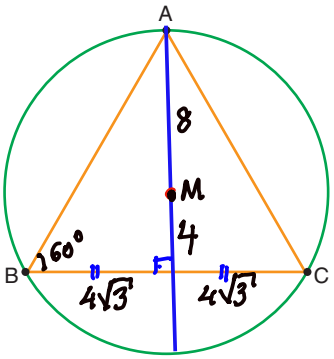
$(x-1)^2+(y-1)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$M(1,1)$ $\quad r=\frac{1}{2}$

5. Aşağıda denklemi,

$x^2 + y^2 + 10x + 10y - 14 = 0$

olan bir çember içerisine köşeleri çember üzerinde olacak şekilde ABC eşkenar üçgeni çizilmiştir.



Buna göre, Çevre(ABC) kaç birimdir?

A) $3\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$

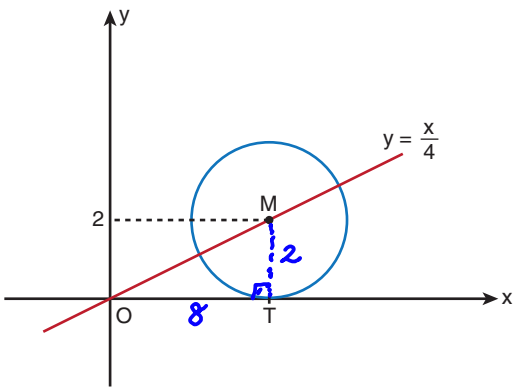
D) $18\sqrt{3}$ E) $24\sqrt{3}$

$(x+5)^2+(y+5)^2=64 \Rightarrow r^2=64$

$r=8$

$Çevre(ABC)=3.8\sqrt{3}=24\sqrt{3}$

6. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde merkezi $y=\frac{x}{4}$ doğrusu üzerinde bulunan ve x eksenine teğet olan bir çember çizilmiştir.



Çemberin merkezinin ordinatı 2 olduğuna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $x^2 + y^2 - 16x + 4y - 64 = 0$

B) $x^2 + y^2 + 16x + 4y + 20 = 0$

C) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$

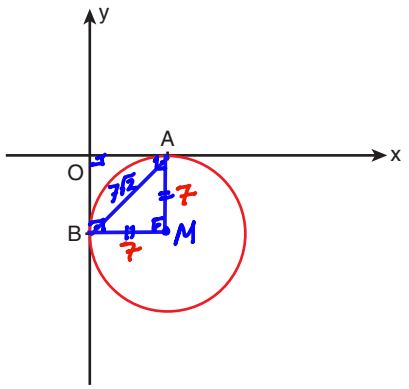
D) $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 20 = 0$

E) $x^2 + y^2 - 16x - 4y + 64 = 0$

$(x-8)^2+(y-2)^2=2^2$

$x^2-16x+y^2-4y+64=0$

7. Dik koordinat düzleminde 4. bölgede eksenlere teğet olan bir çember çizilmiştir.



|AB| = $7\sqrt{2}$ birim olduğuna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x-7)^2 + (y+7)^2 = 7$

B) $(x-7)^2 + (y+7)^2 = 49$

C) $(x+7)^2 + (y-7)^2 = 42$

D) $(x-7)^2 + (y+7)^2 = 4$

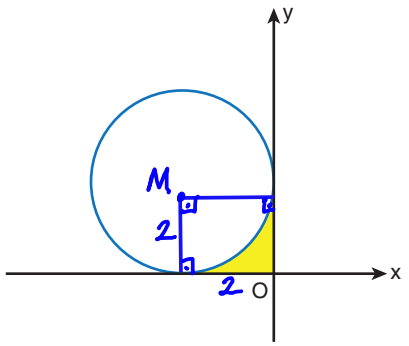
E) $(x+7)^2 + (y-7)^2 = \sqrt{7}$

$M(7,-7)$ $r=7$

$(x-7)^2+(y+7)^2=7^2$

$(x-7)^2+(y+7)^2=49$

8.



Dik koordinat düzleminde denklemi,

$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-2)^2=4$

olan bir çember çizilmiştir.

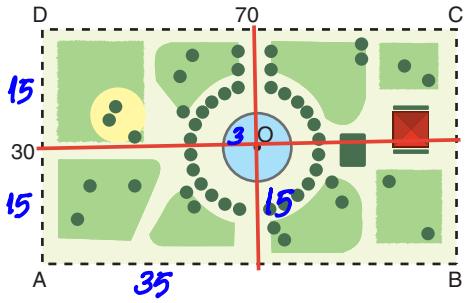
Buna göre, boyalı bölgenin alanı kaç birimkaredir?

A) $\pi - 2$ B) $4 - \pi$ C) $6 - \pi$

D) $8 - \pi$ E) $12 - \pi$

$2.2-\frac{\pi.2^2}{4}=4-\pi$

9. Aşağıda kenar uzunlukları 30 birim ve 70 birim olan dikdörtgen şeklinde bir park görseli verilmiştir.



Dikdörtgenin köşegenlerinin kesim noktası parkın içerisindeki O merkezli yarıçapı 3 birim olan çember şeklindeki havuzun merkezidir.

Buna göre, park A köşesi orijin olacak şekilde analitik düzleme yerleştirilirse çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşit olur?

A) $(x-32)^2+(y-10)^2=9$

B) $(x-25)^2+(y-15)^2=9$

C) $(x-35)^2+(y-15)^2=9$

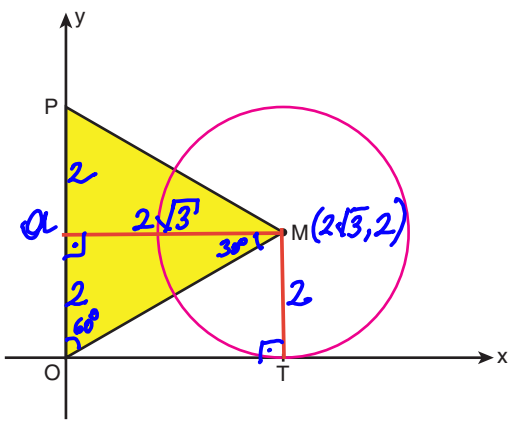
D) $(x-33)^2+(y-18)^2=9$

E) $(x-32)^2+(y-12)^2=9$

$O(35,15)\quad r=3$

$(x-35)^2+(y-15)^2=3^2$

10.



Dik koordinat düzleminde M merkezli çember Ox eksenine teğettir. Boyalı eşkenar üçgenin alanı $4\sqrt{3}$ birimkaredir.

Buna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(x-2)^2+(y-2\sqrt{3})^2=12$

B) $(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2=12$

C) $(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$

D) $(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2=4$

E) $(x-\sqrt{3})^2+(y-2)^2=9$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$

$a=4$

$(x-2\sqrt{3})^2+(y-2)^2=2^2$

11. Çapının uç noktaları A(2, 3) ve B(–4, 5) olan çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(x+1)^2+(y-4)^2=9$

B) $(x+1)^2+(y-3)^2=9$

C) $(x-1)^2+(y-4)^2=10$

D) $(x+1)^2+(y-2)^2=10$

E) $(x+1)^2+(y-4)^2=10$

$M\left(\frac{2-4}{2},\frac{3+5}{2}\right)$

$M(-1,4)$

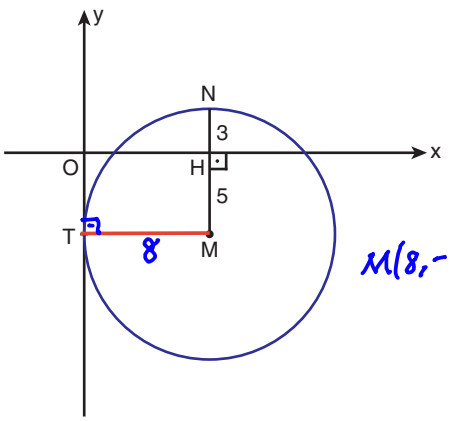
$2r=\sqrt{6^2+2^2}$

$2r=2\sqrt{10}\Rightarrow r=\sqrt{10}$

$(x+1)^2+(y-4)^2=(\sqrt{10})^2$

$(x+1)^2+(y-4)^2=10$

12. Dik koordinat düzleminde merkezi M olan çember y eksenine T noktasında teğettir.



$[MN]\perp Ox$

$M(8,-5)\quad r=8$

$|MH|=5$ birim ve $|NH|=3$ birim

olduğuna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(x-5)^2+(y-8)^2=64$

B) $(x-8)+(y+5)^2=64$

C) $(x-8)^2+(y-5)^2=64$

D) $(x-8)^2+(y-5)^2=39$

E) $(x-5)^2+(y+8)^2=39$

$(x-8)^2+(y+5)^2=8^2$

$(x-8)^2+(y+5)^2=64$

1. C	2. A	3. D	4. C	5. E	6. E
7. B	8. B	9. C	10. D	11. E	12. B

1. A(1, 0) ve B(5, 5) noktalarından geçen çemberin merkezi x ekseni üzerinde olduğuna göre, yarıçapı kaç birimdir?

A) $\frac{41}{8}$ B) $\frac{41}{4}$ C) $\frac{45}{4}$ D) $\frac{45}{8}$ E) $\frac{49}{8}$

$(x-a)^2+y^2=r^2$

$A(1,0) \rightarrow (1-a)^2+0^2=r^2 \Rightarrow 1-2a+a^2=r^2$

$B(5,5) \rightarrow (5-a)^2+5^2=r^2 \Rightarrow 50-10a+a^2=r^2$

$1-2a+a^2=50-10a+a^2$

$8a=49 \Rightarrow a=\frac{49}{8}$

$r^2=(1-0)^2 \Rightarrow r=\frac{49}{8}-1 \Rightarrow r=\frac{41}{8}$

2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + k = 0$

ifadesi bir çember belirtmediğine göre, k'nın bulunduğu en geniş aralık aşağıdakilerden hangisidir?

A) $k \geq 16$ B) $k \leq 16$ C) $k \geq 13$

D) $k \leq 13$ E) $13 \leq k \leq 16$

$\Delta = 4^2+6^2-4.k \leq 0$

$52 \leq 4k \Rightarrow k \geq 13$

3. $m > 0$ olmak üzere $y = mx$ doğrusu,

$(x - 4)^2 + y^2 = 4$

çemberine teğettir.

Buna göre, m kaçtır?

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{1}{2}$

$(x-4)^2+(mx)^2=4 \Rightarrow (1+m^2)x^2-8x+12=0$

$\Delta=0 \Rightarrow 8^2-4.(1+m^2).12=0$

$1+m^2=\frac{64}{48} \Rightarrow m^2=\frac{16}{48}$

$m=\frac{1}{\sqrt{3}}$

4. Denklemi,

$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

olan çember ile aynı merkezli ve Oy eksenine teğet olan çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 16$

B) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$

C) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$

D) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$

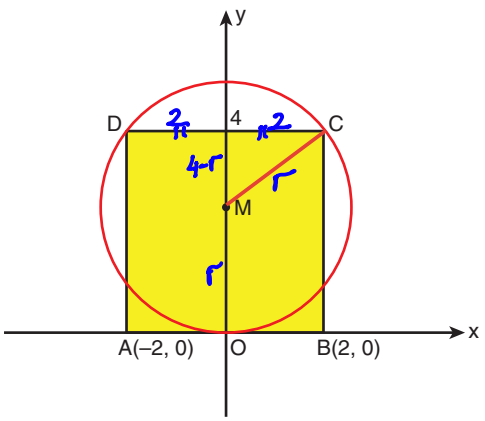
E) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 12$

$M(-3,4)$

$(x+3)^2+(y-4)^2=3^2$

$(x+3)^2+(y-4)^2=9$

5. Dik koordinat düzleminde Ox eksenine orijinde teğet olan M merkezli bir çember çizilmiştir.



ABCD karesinin iki köşesi A(–2, 0) ve B(2, 0) dır.

Buna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $x^2 + y^2 - 5y = 0$

B) $x^2 + y^2 + y = 0$

C) $2x^2 + 2y^2 - 6y + 1 = 0$

D) $4x^2 + 4y^2 - 16y + 15 = 0$

E) $x^2 + y^2 - 5y + 6 = 0$

$(4-r)^2+2^2=r^2$

$20-8r+r^2=r^2$

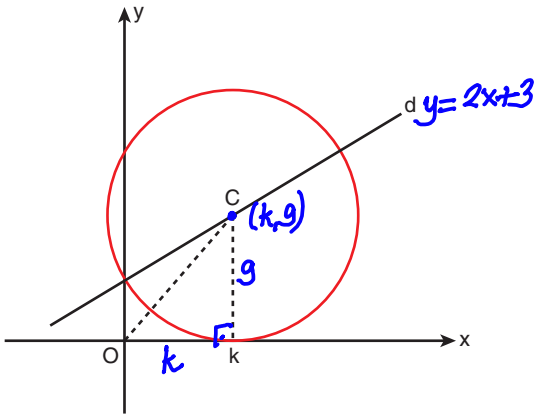
$8r=20$

$r=\frac{5}{2}$

$x^2+(y-\frac{5}{2})^2=(\frac{5}{2})^2$

$x^2+y^2-5y=0$

6. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde Ox eksenine teğet olan C merkezli çember çizilmiştir. d: y = 2x + 3 doğrusu çemberin merkezinden geçmektedir.



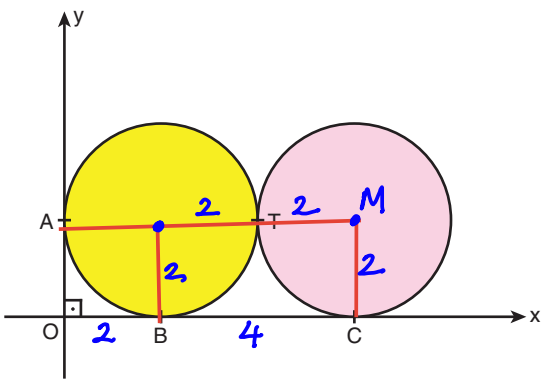
Çemberin yarıçapı 9 birim olduğuna göre, |OC| kaç birimdir?

A) $10\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{10}$ C) $6\sqrt{10}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{10}$

$2k+3=9 \Rightarrow k=3$

$|OC|^2=3^2+9^2 \Rightarrow |OC|=3\sqrt{10}$

7.



A, B, C ve T noktaları teğet noktalar olmak üzere sarıya boyalı çemberin denklemi,

$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

olduğuna göre, sarıya boyalı çemberle yarıçapı eşit olan pembeye boyalı çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

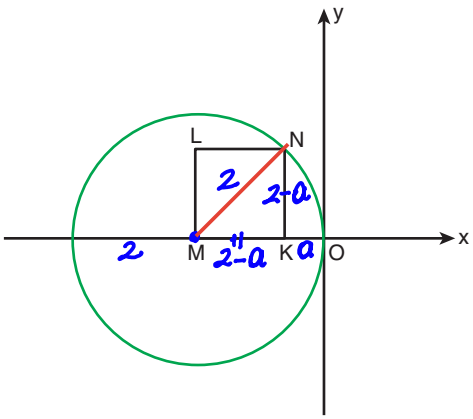
A) $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$ $M(6,2)$ $r=2$
B) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$
C) $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 4$
D) $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$
E) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$

$(x-6)^2+(y-2)^2=4$

8. Dik koordinat düzleminde denklemi,

$x^2 + y^2 + 4x = 0$ $(x+2)^2+y^2=4$

olan M merkezli bir çember çizilmiştir.

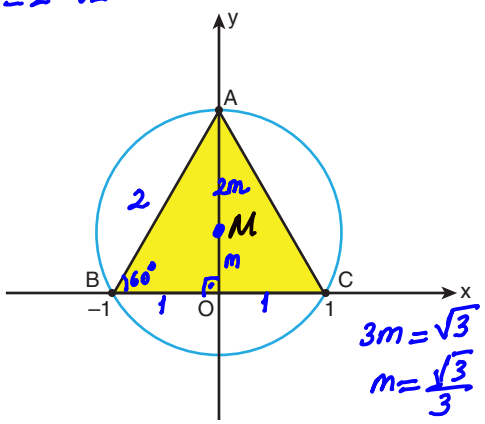


MKNL bir kare olmak üzere, N noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2})$ B) $(\sqrt{2}-2,\ 2)$
C) $(-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$ D) $(-\sqrt{2}+2,\ \sqrt{2})$
E) $(-\sqrt{2}-2,\ 2-\sqrt{2})$

$(2-a)\cdot\sqrt{2}=2$ $N(-a, 2-a)$
$2-a=\sqrt{2}$ $N(\sqrt{2}-2, \sqrt{2})$
$a=2-\sqrt{2}$

9.



$3m=\sqrt{3}$
$m=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Yukarıda verilen ABC eşkenar üçgeninin köşeleri çemberin üzerindedir. $M\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $r=2m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B(–1, 0) ve C(1, 0) olduğuna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

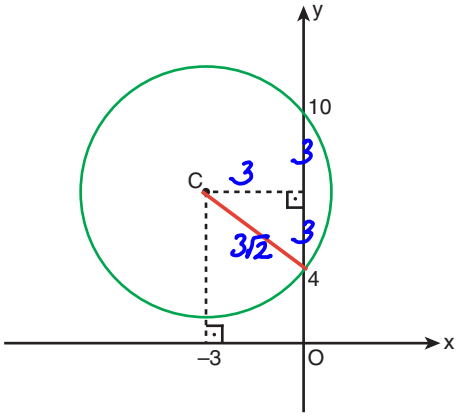
A) $x^2+y^2=\frac{1}{3}$ B) $x^2+y^2=\frac{4}{3}$

C) $x^2+\left(y-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$ D) $x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2=\frac{1}{3}$

E) $x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$

$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}$

10. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde y eksenini (0, 4) ve (0, 10) noktalarında kesen bir çember verilmiştir.



Buna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $(x + 3)^2 + (y – 7)^2 = 18$

B) $(x + 3)^2 + (y – 6)^2 = 18$

C) $(x + 2)^2 + (y – 6)^2 = 12$

D) $(x + 3)^2 + (y – 7)^2 = 12$

E) $(x + 3)^2 + (y – 5)^2 = 18$

C(-3,7)
r = 3√2

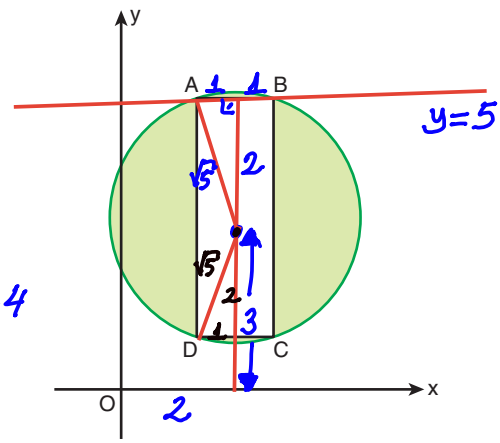
$(x+3)^2+(y-7)^2=(3\sqrt{2})^2$

$(x+3)^2+(y-7)^2=18$

11. Aşağıdaki dik koordinat düzleminde denklemi,

$(x – 2)^2 + (y – 3)^2 = 5$

olan çember verilmiştir.



A(ABCD) = 2.4 = 8

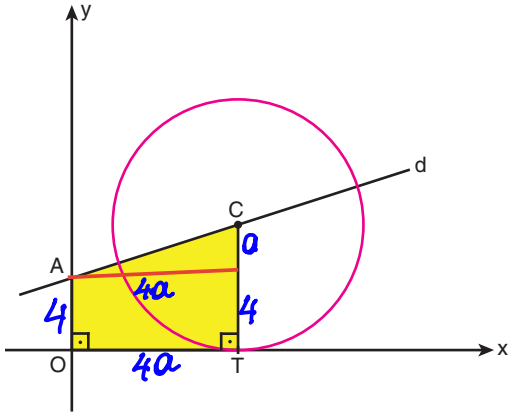
ABCD dikdörtgeninin AB kenarı y = 5 doğrusu üzerinde olduğuna göre, taralı alan kaç birimkaredir?

A) $5\pi – 4$ B) $5\pi – 8$ C) $10\pi – 4$

D) $10\pi – 6$ E) $5\pi – 6$

$\pi.(\sqrt{5})^2 - 2.4 = 5\pi - 8$

12. Aşağıdaki dik koordinat düzleminde C merkezli bir çember çizilmiştir.



d doğrusunun eğimi $\frac{1}{4}$ olup y eksenini A(0, 4) noktasında kesmektedir.

OACT dik yamuğunun alanı 40 birimkare olduğuna göre, çemberin denklemi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) $(x – 4)^2 + (y – 6)^2 = 36$

B) $(x – 6)^2 + (y – 6)^2 = 64$

C) $(x – 8)^2 + (y – 6)^2 = 36$

D) $(x – 4)^2 + (y – 8)^2 = 64$

E) $(x – 4)^2 + (y – 6)^2 = 16$

$\frac{a+4+4}{2}.4a = 40$

$(a+8).2a = 40$

$(a+8).a = 20$

$a = 2$

M(8,6) r = 6

$(x-8)^2+(y-6)^2=6^2$

$(x-8)^2+(y-6)^2=36$

1. A	2. C	3. D	4. B	5. A	6. E
7. A	8. A	9. E	10. A	11. B	12. C